Министерство сельского хозяйства Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Пермский государственный аграрно-технологический университет
имени академика Д.Н. Прянишникова»

С.В. Каштаева

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Учебное пособие

Пермь
ИПЦ «Прокростъ»
2020

УДК 51
ББК 22.1
К-316

Рецензенты:

Д.В. Климов, кандидат экономических наук, доцент кафедры предпринимательства и экономической безопасности ФГБОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет».

В.П. Черданцев, доктор экономических наук, профессор кафедры менеджмента, ФГБОУ ВО Пермский ГАТУ.

К-316 Каштаева, С.В.

Исследование операций : учебное пособие / С.В. Каштаева; Министерство сельского хозяйства Российской Федерации, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Пермский аграрно-технологический университет имени академика Д.Н. Прянишникова». – Пермь : ИПЦ «Прокростъ», 2020. – 77 с ; 21 см – Библиогр.: с.76. – 35 экз. – ISBN 978-5-94279-499-6 – Текст : непосредственный

В учебном пособии изложены основные положения теории исследования операций, рассмотрены методы исследования операций: математическое программирование, в том числе линейное и динамическое, методы сетевого планирования и управления, систем массового обслуживания и матричных игр. Имеются вопросы для самоконтроля по разделам и для подготовки к промежуточной аттестации.

Учебное пособие предназначено для обучающихся высших учебных заведений по направлению подготовки 09.03.04 Программная инженерия, направленность (профиль) «Разработка программно-информационных систем», а также может быть использовано специалистами предприятий агропромышленного комплекса, преподавателями и аспирантами сельскохозяйственных вузов.

УДК 51
ББК 22.1

Утверждено в качестве учебного пособия методическим советом Пермского государственного аграрно-технологического университета им. Д.Н. Прянишникова.

ISBN 478-5-94279-499-6

Содержание

Список сокращений

СМО – системы массового обслуживания

ЛП – линейное программирование

ДП – динамическое программирование

ВВЕДЕНИЕ

В различных областях практической деятельности организации производства и снабжения, эксплуатации транспорта, расстановке кадров, в бытовом обслуживании, здравоохранении, связи и т.д. все чаще возникают задачи, сходные между собой по постановке, обладающие рядом общих признаков и решаемые сходными методами, которые удобно объединять под общим названием «задач исследования операций».

Типичная ситуация такова: организуется какое-то целенаправленное мероприятие (система действий), которое можно организовать тем или другим способом, то есть выбрать какое-то «решение» из ряда возможных вариантов. Каждый вариант обладает какими-то преимуществами и какими-то недостатками, причем, в силу сложности обстановки, не сразу ясно, какой из них лучше (предпочтительнее) других и почему. С целью прояснить обстановку и сравнить между собой по ряду признаков различные варианты решения организуется серия математических расчетов. Их задача – помочь людям, ответственным за выбор решения, произвести критический анализ ситуации и, в конечном счете, остановиться на том или другом варианте.

Подход к этим задачам с общих, а не с узковедомственных позиций имеет ряд преимуществ: он расширяет кругозор исследователя, обеспечивает взаимопроникновение и взаимообогащение научных методов, подходов и приемов, выработанных в разных областях практики.

Исследование операций – дисциплина, занимающаяся разработкой и практическим применением методов наиболее эффективного управления различными организационными и производственными системами.

Управление любой системой реализуется как процесс, подчиняющийся определенным закономерностям. Их знание помогает найти условия, необходимые и достаточные для осуществления данного процесса. Для этого все параметры, характеризующие процесс и внешние условия, должны быть количественно определены, измерены. Следовательно, основной задачей исследования операций является количественное обоснование принимаемых решений по организации управления.

Цель издания учебного пособия – оказать обучающимся помощь в освоении современных методов исследования операций, анализа и научного прогнозирования поведения экономических объектов в соответствии с рабочей программой дисциплины «Исследование операций».

Изучение материала, представленного в данном учебном пособии, направлено на формирование соответствующих компетенций, предусмотренных ФГОС ВО по направлению 09.03.04 Программная инженерия.

В результате изучения дисциплины студент должен:

– освоить основные положения теории исследования операций и методы исследования операций с учетом особенностей задач;

– научиться анализировать поставленную задачу и выбирать пути её решения, математически формулировать и решать задачи исследования операций;

– приобрести навыки решения задач исследования операций.

В учебном пособии представлены и систематизированы сведения научно-практического и прикладного характера, изложенные в доступной и удобной форме, с точки зрения самостоятельного изучения и освоения учебной дисциплины «Исследование операций».

Учебное пособие обобщает и дополняет существующие учебники и учебные пособия по дисциплине «Исследование операций». Новизна пособия заключается в авторской трактовке содержания дисциплины.

Теоретическое изучение и внедрение методов исследования операций и информационных технологий в практическую деятельность является *актуальным*. Предприятиям нужны специалисты, которые знают предметную область и способны формализовать возникающие задачи, а также владеть методами исследования операций и соответствующим программным обеспечением.

Учебное пособие включает пять разделов.

В разделе 1 «Основные понятия и методы исследования операций» отражены основные понятия и принципы исследования операций, приведена классификация методов исследования операций.

В разделе 2 «Математическое программирование» рассмотрены методы математического программирования –линейное и динамическое программирование.

В разделе 3 «Сетевое планирование и управление» представлены основы построения сетевых моделей и методика расчета временных параметров сетевых графиков.

В разделе 4 «Системы массового обслуживания» отражены теоретические и практические основы систем массового обслуживания, подробно рассмотрены системы массового обслуживания с отказами и системы с ожиданием и ограниченной длиной очереди.

В разделе 5 «Теория матричных игр» представлены основные понятия и теоремы теории игр, подробно рассмотрены игры с «природой».

Дидактический аппарат, представленный в учебном пособии в виде вопросов для самопроверки по разделам и в целом по дисциплине, позволит обучающимся закрепить полученные знания. Библиографический список включает библиотечные фонды и ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», которые применяются в образовательном процессе и способствуют изучению дисциплины.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

1.1 Предмет исследования операций

В настоящее время теоретические и практические исследования уделяют большое внимание вопросам организации и управления. Быстрое развитие и усложнение техники, расширение масштабов проводимых мероприятий и спектра их возможных последствий, внедрение информационных технологий – все это приводит к необходимости анализа сложных целенаправленных процессов под углом зрения их структуры и организации. От науки требуются рекомендации по оптимальному (рациональному) управлению такими процессами.

Для решения поставленных задач созданы специальные научные методы, которые объединены под названием «исследование операций».

Исследование операций заключается в применении математических методов для обоснования решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности.

Исследование операций – сравнительно молодая наука. Впервые название «исследование операций» появилось в годы Второй мировой войны, когда в вооруженных силах некоторых стран (США, Англии) были сформированы специальные группы научных работников (физиков, математиков, инженеров), в задачу которых входила подготовка проектов решений для командующих боевыми действиями. Эти решения касались главным образом боевого применения оружия и распределения сил и средств по различным объектам. Подобного рода задачами (правда, под иными названиями) занимались и ранее, в частности, в нашей стране. В дальнейшем исследование операций расширило область своих применений на самые разные области практики: промышленность, сельское хозяйство, строительство, торговля, бытовое обслуживание, транспорт, связь, здравоохранение, охрану природы и т.д. Сегодня трудно назвать такую область практики, где бы не применялись, в том или другом виде, математические модели и методы исследования операций.

В создание современного математического аппарата и развитие многих направлений исследования операций большой вклад внесли российские ученые Л. В. Канторович, Н. П. Бусленко, Е. С. Вентцель, Н. Н. Воробьев, Н. Н. Моисеев, Д. Б. Юдин и многие другие. Особо следует отметить роль академика Л. В. Канторовича, который в 1939 г., занявшись планированием работы агрегатов фанерной фабрики, решил несколько задач: о наилучшей загрузке оборудования, раскрое материалов с наименьшими потерями, о распределении грузов по нескольким видам транспорта и др. Л. В. Канторович сформулировал новый класс экстремальных задач и предложил универсальный метод их решения, положив начало новому направлению прикладной математики–линейному программированию.

Значительный вклад в формирование и развитие исследования операций внесли зарубежные ученые Р. Акоф, Р. Беллман, Г. Данциг, Г. Кун, Дж. Нейман, Т. Саати, Р. Черчмен, А. Кофман и др.

1.2 Основные понятия и принципы исследования операций

Исследование операций – это процесс, заключающийся в построении, разработке и применении математических моделей принятия решений в различных областях человеческой деятельности.

Операция – это мероприятие (система действий), объединенное единым замыслом и направленное к достижению определенной цели.

Операция есть всегда управляемое мероприятие, т.е. от нас зависит, каким способом выбрать некоторые параметры, характеризующие ее организацию. «Организация» здесь понимается в широком смысле слова, включая набор технических средств, применяемых в операции.

Каждое операционное исследование проходит последовательно следующие основные этапы:

1) постановка задачи;
2) построение математической модели;
3) нахождение решения;
4) проверка и корректировка модели;
5) реализация найденного решения на практике.

Наряду с субъектом, т.е. с оперирующей стороной, мы всегда имеем дело еще и с *исследователем операции*. Он действует в интересах оперирующей стороны, и его задача состоит в том, чтобы найти способ использования ресурса (т.е. возможностей оперирующей стороны), обеспечивающий достижение цели.

Результат операции зависит от способа ее проведения, организации, т.е. от выбора определенных параметров.

Решение – это какой-то выбор из ряда допустимых возможностей.

Оптимальными считают те решения, которые по тем или иным соображениям предпочтительнее других. Поэтому основной задачей исследования операций является предварительное количественное обоснование оптимальных решений.

В результате исследования удается указать или единственное строго оптимальное решение, или выделить область практически равноценных оптимальных (рациональных) решений, в пределах которой может быть сделан окончательный выбор.

Принятие решений обычно выходит за рамки исследования операций и относится к компетенции ответственного лица, чаще – группы лиц, которым предоставлено право окончательного выбора и на которых возложена ответственность за этот выбор. Делая выбор, они могут учитывать, наряду с рекомендациями, вытекающими из математического расчета, еще ряд соображений (количественного и качественного характера), которые этим расчетом не были учтены.

Непременное присутствие человека, принимающего решение, не отменяется даже при наличии полностью автоматизированной системы управления. Нельзя забывать о том, что само создание управляющего алгоритма, выбор одного из возможных его вариантов, есть тоже решение, и весьма ответственное. По мере развития управляющих автоматов функции человека не отменяются, а просто перемещаются с одного, элементарного, уровня на другой, высший. Кроме того, ряд автоматизированных систем управления предусматривает в ходе управляемого процесса активное вмешательство человека.

Те параметры, совокупность которых образует решение, называются элементами решения. В качестве элементов решения могут фигурировать различные числа, векторы, функции, физические признаки и т. д.

Кроме элементов решения, которыми мы, в каких-то пределах, можем распоряжаться, в любой задаче исследования операций имеются еще и заданные условия, которые фиксированы и нарушены быть не могут (например, материальные, технические, трудовые ресурсы, размер планового задания и т. п.).

В совокупности возможных решений требуется выделить те, которые с той или другой точки зрения эффективнее других.

Чтобы сравнивать между собой по эффективности разные решения, нужно выбрать какой-то количественный критерий, так называемый показатель эффективности (его часто называют «целевой функцией»). Этот показатель выбирается так, чтобы он отражал целевую направленность операции. «Лучшим» будет считаться то решение, которое в максимальной степени способствует достижению поставленной цели.

Например, в задаче об использовании ресурсов критерий эффективности – прибыль от реализации произведенной продукции, которую нужно максимизировать, в транспортной задаче – суммарные затраты на перевозку грузов от поставщиков к потребителям, которые нужно минимизировать.

Очень часто выполнение операции сопровождается действием случайных факторов («капризы» погоды, колебания спроса и предложения и т. д.). В таких случаях обычно в качестве показателя эффективности берется не сама величина, которую хотелось бы максимизировать (минимизировать), а среднее значение (математическое ожидание).

После постановки задачи осуществляется *формализация операции*, ее описание с помощью языка математики. От того, как будет формализована задача, будет зависеть результат исследования. Простое описание делает и анализ более простым, но если модель не будет в достаточной степени адекватна реальности, то мы получим сомнительную достоверность результатов. Переусложненная задача, учитывающая разнообразные детали процесса и с большими подробностями описывающая реальность, может привести к таким затратам ресурсов, которые даже высокая точность результата не сможет оправдать.

Для применения количественных методов исследования требуется построить *математическую модель операции*. При построении модели операция, как правило, упрощается, и схема операции описывается с помощью того или иного математического аппарата. Модель операции может быть представлена в виде функций, уравнений, систем уравнений и неравенств и т.п.).

Чем удачнее будет подобрана математическая модель, чем лучше она будет отражать характерные черты явления, тем успешнее будет исследование и полезнее вытекающие из него рекомендации.

Математическая подготовка специалиста, желающего самостоятельно заниматься исследованием операций в своей области практики, должна быть достаточно широка. Наряду с классическими разделами математического анализа в исследовании операций часто применяются современные разделы математики, такие, как линейное, динамическое программирование, сетевое планирование и управление, теория массового обслуживания, теория игр и др.

Специально надо подчеркнуть необходимость сведений по теории вероятностей. Особые требования именно к этой области математических знаний объясняются тем, что большинство операций проводится в условиях неполной определенности, и их исход зависит от случайных факторов.

1.3 КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

Модели и методы исследования операций могут быть классифицированы в зависимости от природы и свойств операций, характера решаемых задач, особенностей применяемых математических методов.

Следует выделить прежде всего большой класс оптимизационных моделей. Такие задачи возникают при попытке оптимизировать планирование и управление сложными системами, в первую очередь, экономическими системами.

К большому классу оптимизационных моделей и методов, используемых при исследовании операций, относится *математическое программирование.*

Математическое программирование включает теорию и методы решения задач о нахождении экстремумов функций на множествах векторного пространства, определяемых линейными и нелинейными ограничениями (равенствами и неравенствами). Присутствие в названии термина «программирование» объясняется тем, что первые исследования оптимизационных задач были в сфере экономики, а в английском языке слово «programming» означает планирование, составление планов или программ.

В математическое программирование входят, в свою очередь, линейное программирование, динамическое программирование, дискретное (целочисленное) программирование, дробно-линейное программирование, стохастическое программирование и др.

По своей содержательной постановке множество других типичных задач исследования операций может быть разбито на ряд классов.

Модели *сетевого планирования и управления* используются в управлении проектами с целью минимизации временных сроков их выполнения и стоимости работ. Отображают комплекс работ (операций) и событий, их взаимосвязь во времени и издержки, соотношения между сроками окончания крупного комплекса операций (работ) и моментами начала всех операций комплекса.

Для многих производственных социально-экономических систем характерен поток входных требований (заявок), поступающих в один или несколько каналов обслуживания и иногда образующих очередь. Заявками могут быть производственные и торговые заказы, заявки на ремонт различных механизмов и т.д. Канал обслуживания может представлять собой совокупность устройств, этап производственного процесса, магазин, склад и т.д. При этом интервалы между последовательными заявками и продолжительность их обслуживания являются случайными величинами.

Для решения таких задач используются модели *систем массового обслуживания* (далее – СМО). Решение задач СМО позволяет сделать рациональный выбор структуры системы обслуживания и процесса обслуживания. При этом изучаются потоки требований на обслуживание, длительности ожидания и длины очередей. В результате решения задач СМО определяются оптимальные характеристики, в частности, определение числа каналов обслуживания, времени обслуживания и т.п. При этом минимизируются затраты времени на ожидание в очереди и времени простоев каналов обслуживания и т.д.

Среди моделей исследования операций особо выделяются модели принятия оптимальных решений в конфликтных ситуациях, изучаемые *теорией игр*. К конфликтным ситуациям, в которых сталкиваются интересы двух (или более) сторон, преследующих разные цели, можно отнести ряд ситуаций в области экономики, права, военного дела и т.п. Теория игр позволяет выбрать лучшие стратегии с учетом представлений о других участниках, их ресурсах и их возможных поступках.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Назовите предмет и задачи исследования операций.
2. Дайте определения операции и исследования операций.
3. Перечислите этапы операционного исследования.
4. Дайте понятие решения и оптимального решения.
5. Охарактеризуйте процесс принятия решения.
6. Охарактеризуйте процесс формализации операции.
7. Дайте определение математической модели операции.
8. Приведите классификацию методов исследования операций.
9. Охарактеризуйте сущность математического программирования.
10. Приведите виды программирования, которые входят в математическое программирование.
11. Охарактеризуйте модели и методы сетевого планирования и управления.
12. Дайте характеристику моделям СМО.
13. Охарактеризуйте назначение моделей и методов теории игр.

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

2.1 Линейное программирование

Линейное программирование (далее – ЛП) – наука о методах исследования и отыскания экстремальных (наибольших и наименьших) значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения. Эта линейная функция называется целевой, а ограничения, которые математически записываются в виде уравнений или неравенств, называются системой ограничений.

Математическое выражение целевой функции и ее ограничений называется математической моделью экономической задачи.

Постановка задачи линейного программирования

Найти оптимум (наибольшее или наименьшее значение) целевой функции (линейной формы) $F(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ на области допустимых значений системы ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,\dots,l; \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = l+1,\dots,m;$$

при наличии дополнительных условий неотрицательности переменных $x_j \ge 0, j = 1,\dots, n$.

Если в системе ограничений $l = m$, т.е. она состоит только из уравнений, то соответствующая форма записи называется канонической.

Основные определения и теоремы

Функция $F(X)$ называется целевой функцией, или линейной формой задачи, а условия (2.1) – ограничениями данной задачи.

Стандартной (или симметричной) задачей ЛП является задача, которая состоит в определении максимального значения функции $F(X)$ при выполнении ограничений – неравенств.

Канонической или основной задачей ЛП называется задача, которая состоит в определении максимального значения функции F при выполнении ограничений – равенств.

Совокупность чисел $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая ограничениям задачи (2.1), называется допустимым решением или планом.

План $X^*(x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n)$, при котором целевая функция задачи принимает максимальное значение, называется оптимальным.

Свойства основной задачи ЛП тесно связаны со свойствами так называемых выпуклых множеств.

Рассмотрим (без доказательства) отражающие свойства основной задачи ЛП, теоремы, предварительно записав ряд определений.

Определение 1. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – произвольные точки евклидова пространства. Выпуклой линейной комбинацией этих точек называется сумма $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$, где α – произвольные неотрицательные числа, сумма которых равна 1: $\sum_{j=1}^{n} \alpha_i = 1; \alpha_i \geq 0, i = 1, \ldots n.$

Определение 2. Множество называется выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и их произвольную выпуклую линейную комбинацию.

Определение 3. Непустое множество планов основной задачи ЛП называется многогранником решений, а всякая угловая точка многогранника – вершиной.

Совокупность вершин многогранников решений называется опорным планом.

Теперь сформулируем теоремы о свойствах основной задачи ЛП.

Теорема 1. Множество планов основной задачи ЛП является *выпуклым* (если оно не пусто).

Теорема 2. Если основная задача ЛП имеет оптимальный план, то максимальное значение целевая функция принимает в одной из вершин многогранника решений.

Если максимальное значение целевая функция задачи принимает более чем в одной вершине, то она принимает его во всякой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин.

Двойственность в линейном программировании

В линейном программировании каждой прямой задаче, переменными которой являются размеры видов деятельности, соответствует двойственная задача, переменными которой являются оценки видов деятельности, ресурсов, продуктов.

Двойственная задача получается из прямой транспонированием столбцов в строки, объемы ограничений прямой задачи становятся коэффициентами целевой функции в двойственной задаче, коэффициенты целевой функции прямой задачи становятся объемами ограничений в двойственной задаче, меняются экстремум функции и знаки неравенств на противоположные.

Если в исходной задаче ищется $F(\overline{X}) \rightarrow max$, определяются значения n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и используется m ограничений; то в двойственной задаче находятся $Z(\overline{Y}) \rightarrow min$, значения m переменных $y_1, y_2, \ldots, y_m$ и используется n ограничений.

Ограничения двойственной задачи показывают, что предприятие, например, продающее сырье, заинтересовано в том, чтобы выручка от продажи была не менее той суммы, которую предприятие может получить при переработке сырья в готовую продукцию. Поэтому выручка от продажи сырья, используемого при изготовлении продукции, должна быть не менее ее цены c_i.

Вид целевой функции Z показывает, что организация, покупающая ресурсы, заинтересована в том, чтобы затраты на все сырье были минимальны.

Таким образом, необходимо найти такой набор теневых цен (оценок) ресурсов $\overline{Y} = (y_1, y_2, y_3)$, при котором общие затраты на сырье Zбудут минимальными (min) при условии, что выручка от продажи сырья A, B, C, используемого при производстве единицы продукции I и II видов, будет не менее единичной прибыли (прибыли от реализации единицы продукции).

Искомыми переменными являются y_1, y_2, y_3 – теневые (внутренние) цены на сырье. *Теневая цена* выражает величину изменения целевой функции F (прибыли) при изменении имеющегося объема сырья данного вида (т.е. в исходной задаче – правой части неравенства) на единицу при условии, что все остальные переменные не изменяются. Теневая цена имеет и другие названия: условная, скрытая, неявная. Смысл этих названий в том, что это условные, ненастоящие цены, которые определяются непосредственно в результате решения задачи, поэтому их называют *оценками или двойственными оценками*.

Двойственные оценки бывают нулевыми и ненулевыми.

Оценки делятся:

1) на оценки основных переменных;

2) на оценки ограничений, которые делятся:

− на оценки ресурсов;

− на оценки продуктов.

Теория двойственности формулирует основные утверждения о взаимодвойственных задачах в двух теоремах.

1 теорема двойственности

Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая имеет оптимальное решение, причем экстремальные значения соответствующих целевых функций равны.

В задаче минимизации значение целевой функции последовательно уменьшается от начального значения до оптимального значения. В задаче максимизации значение целевой функции последовательно увеличивается от начального значения до оптимального.

2 теорема двойственности (теорема об оценках)

Значение переменных Y_i в оптимальном решении двойственной задачи представляет собой оценки влияния исходной задачи на экстремальное значение ее целевой функции.

Таблица 1

Правила для анализа оптимального плана
по двойственным оценкам

Анализ переменных и ограничений по двойственным оценкам				
	Переменные и ограничения в плане		Двойственная оценка	Что показывает оценка
Переменные	Вошли в план		0	-
	Не вошли в план (=0)		Не нулевая	На сколько ухудшится целевая функция при введении единицы переменной в план
Ограничения	По ресурсам (ограничения ≤)	Ресурс недоиспользуется (не достигнута max граница)	0	-
		Ресурс используется полностью(достигнута max граница)	Не нулевая	На сколько улучшится целевая функция при увеличении ресурса (границы) на ед.
	По продуктам (ограничения ≥)	Производство продукции выше заданного плана	0	-
		Производство продукции равно заданному плану	Не нулевая	На сколько ухудшится целевая функция при производстве единицы данного продукта

Если оценка единицы ресурса i-го вида положительна, то при оптимальной производственной программе этот ресурс используется полностью; если же ресурс используется не полностью, то его оценка равна нулю.

Если j-й вид продукции вошел в оптимальный план, то он в оптимальных оценках не убыточен. Если же j-и вид продукции убыточен, то он не войдет в план, не будет выпускаться.

В таблице 1 приведены правила, по которым производится анализ переменных и ограничений оптимальных планов.

Пример решения и анализа задачи ЛП «Составление плана выгодного производства»

Постановка задачи

Предприятие производит 3 вида продукции *A, B и C*. Для их изготовления используются три вида ресурсов *P1, P2, P3*, объемы которых ограничены. Известны потребности в ресурсах для выпуска единицы каждого j-го вида продукции – «ресурсные коэффициенты» a_{ij} (таблица 2).

Таблица 2

Исходные данные для решения задачи ЛП

Вид ресурса P_i	Ресурсные коэффициенты a_{ij}			Запас ресурса (ограничения по ресурсам) b_i
	продукция A	продукция B	продукция C	
P1	1	1	1	16
P2	4	6	10	100
P3	6	5	4	110
Ед. прибыль	60	70	120	

Известна единичная прибыль c_j от реализации единицы каждого *j*-го вида продукции. Реализация единицы продукции А дает прибыль c_1 = 60 д. ед., продукции В – прибыль c_2 = 70 д. ед. и продукции С – прибыль c_3 = 120 д. ед. Заданы также граничные значения объемов выпуска продукции (верхняя и нижняя границы продукции А равны, соответственно, 4 и 1). Виды продукции В и С можно производить неограниченно в любом количестве (верхние границы их объемов равны +∞).

Необходимо определить оптимальный план производства продукции $\overline{X}^{*} = \left(x_1^{*};\, x_2^{*};\, x_3^{*}\right)$, при котором будет получена максимальная общая прибыль.

Разработаем *математическую модель* задачи.

Обозначим переменные:

x_1, x_2, x_3 – объемы производства продукции A, B и C.

Запишем целевую функцию:

$F = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 \to \max$.

Ограничения на ресурсы:

$P1 = x_1 + x_2 + x_3 \leq 16$;

$P2 = 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 \leq 100$;

$P3 = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 110$.

Ограничения на объемы производства по видам продукции:

$1 \leq x_1 \leq 4$;

$x_2 \geq 2$;

$x_3 \geq 2$.

Две последние записи означают, что для продукции B и C верхней границы нет, их можно производить в любых количествах, поскольку известно, что их сбыт всегда обеспечен.

При решении задач ЛП на компьютере можно использовать любую программу или пакет программ, которые реализуют алгоритмы решения задач математического программирования. К таким программным средствам относятся, например, MATLAB, MathCAD, табличный процессор MSExcel (надстройка «Поиск решения») и другие.

Для решения нашей задачи будем использовать MSExcel, надстройку «Поиск решения», параметр «Решение задачи симплексным методом».

Решение задачи ЛП на компьютере

1.Исходная электронная расчетная таблица представлена на рисунке 1. Ввод в нее исходных данных и формул выполняется в соответствии с условиями и математической моделью задачи.

	A	B	C	D	E	F
1	**План выгодного производства**					
2						
3	Вид ресурса	Ресурсные коэффициенты (по видам продукции)			Запас ресурса (имеется в наличии)	Расход ресурса
4		**A**	**B**	**C**		
5	P1	1,0	1,0	1,0	16,0	0,0
6	P2	4,0	6,0	10,0	100,0	0,0
7	P3	6,0	5,0	4,0	110,0	0,0
8	Единич прибыль	60,0	70,0	120,0		
9						
10	Объем произ-ва					
11						
12	Ограничения по объемам производства					
13	Нижняя граница	1,0	2,0	2,0		
14	Верхняя граница	4,0				
15					**Итоговая прибыль**	
16	Общая прибыль	0,0	0,0	0,0	0,0	

Рисунок 1. Исходные данные для решения задачи ЛП

На рисунке 2 представлено полученное оптимальное решение.

	A	B	C	D	E	F
1	**План выгодного производства**					
2						
3	Вид ресурса	Ресурсные коэффициенты (по видам продукции)			Запас ресурса (имеется в наличии)	Расход ресурса
4		**A**	**B**	**C**		
5	P1	1,0	1,0	1,0	16,0	13,2
6	P2	4,0	6,0	10,0	100,0	100,0
7	P3	6,0	5,0	4,0	110,0	62,8
8	Единич прибыль	60,0	70,0	120,0		
9						
10	Объем произ-ва	4,0	2,0	7,2		
11						
12	Ограничения по объемам производства					
13	Нижняя граница	1,0	2,0	2,0		
14	Верхняя граница	4,0				
15					**Итоговая прибыль**	
16	Общая прибыль	240,0	140,0	864,0	1244,0	

Рисунок 2. Оптимальный план

Из полученного решения можно сделать *выводы*: оптимальный план производства предусматривает выпуск 4 ед. продукции A (соответствует верхней границе ограничений по объемам производства), 2 ед. продукции B (соответствует нижней границе ограничений по объемам производства) и 7,2 ед. продукции С. Полученная суммарная прибыль при этом составит 1244 $. Продукция В является неэффективной для производства. Ресурс Р2 является дефицитным, так как используется полностью. Имеется возможность снизить запас ресурса Р1 на 2,8 ед. или запас ресурса Р3 на 47,2 ед. без сокращения итоговой прибыли.

Исследование полученного решения оптимизационной задачи

Часто получения оптимального решения задачи оказывается недостаточно. Например, пользователя может интересовать, насколько *чувствительным* является полученное оптимальное решение к изменению различных параметров исходной модели. Этому способствуют предлагаемые в окне *Результаты поиска решения* отчеты. Таких отчетов три: отчет по результатам, отчет по устойчивости, отчет по пределам.

Отчет по результатам включает три таблицы (рисунок 3).

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$E$16	Общая прибыль Итоговая прибыль	0,0	1244,0

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$10	Объем произ-ва А	0,0	4,0
$C$10	Объем произ-ва В	0,0	2,0
$D$10	Объем произ-ва С	0,0	7,2

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$F$5	Р1 Расход ресурса	13,2	$F$5<=$E$5	не связан.	2,8
$F$6	Р2 Расход ресурса	100,0	$F$6<=$E$6	связанное	0
$F$7	Р3 Расход ресурса	62,8	$F$7<=$E$7	не связан.	47,2
$B$10	Объем произ-ва А	4,0	$B$10>=1	не связан.	3,0
$B$10	Объем произ-ва А	4,0	$B$10<=4	связанное	0
$C$10	Объем произ-ва В	2,0	$C$10>=2	связанное	0,0
$D$10	Объем произ-ва С	7,2	$D$10>=2	не связан.	5,2

Рисунок 3. Отчет по результатам

В первой таблице «Целевая ячейка» приводятся исходное и окончательное (оптимальное) значение целевой функции

(Итоговая прибыль), которая находится в ячейке E16 – целевой ячейке.

Во второй таблице «Изменяемые ячейки» приводятся исходные и окончательные значения оптимизируемых переменных (объемов производства), которые находятся в ячейках B10:D10.

Третья таблица «Ограничения» содержит информацию об ограничениях. В столбце «Значение» помещены оптимальные значения необходимых для выполнения оптимального плана ресурсов и оптимизируемых переменных.

Столбец «Формула» содержит записи ограничений в форме ссылок на используемые ячейки.

Столбец «Статус» определяет связанными или несвязанными являются те или иные ограничения. Ограничения называются *связанными*, если они реализуются в решении в виде жестких равенств. Заметим, что ресурс P2 в оптимальном решении используется полностью (без остатка) и поэтому является связанным, т.е. дефицитным.

Столбец «Разница» для ресурсных ограничений определяет остаток используемого ресурса (например, ресурс P2 исчерпан). Для ограничений по оптимизируемым переменным x_i здесь указывается разность между оптимальным значением x_i^* и верхней или нижней границей. Если эта разность равна нулю, тогда объем производства данного вида продукции считается связанным (x_1^* продукции A – по верхней границе «4», x_2^* продукции B – по нижней границе «2»).

Связанность ограничений заставляет обычно исследователя отказаться от дальнейших поисков улучшения целевой функции.

Отчет по устойчивости состоит из двух таблиц с информацией об оптимизируемых переменных и ограничениях модели (рисунок 4).

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$10	Объем произ-ва А	4,0	12,0	60	1E+30	12
$C$10	Объем произ-ва В	2,0	-2,0	70	2	1E+30
$D$10	Объем произ-ва С	7,2	0,0	120	30	3,333333333

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$F$5	Р1 Расход ресурса	13,2	0,0	16	1E+30	2,8
$F$6	Р2 Расход ресурса	100,0	12,0	100	28	52
$F$7	Р3 Расход ресурса	62,8	0,0	110	1E+30	47,2

Рисунок 4. Отчет по устойчивости для линейных задач

Информация в отчете позволяет оценить *чувствительность* полученного решения (Итоговая прибыль) к изменениям параметров модели.

Верхняя таблица содержит информацию об изменяемых ячейках, содержащих значения объемов производства. В столбце «Результирующее значение» указаны их оптимальные значения. Величина показателя «Нормированная (редуцированная) стоимость» определяется как разность между единичной прибылью и оценкой снижения общей прибыли за счет отвлечения ресурсов для производства продукции данного вида, взятой по теневым ценам этих ресурсов:

(Нормированная стоимость продукции А) = (Единичная прибыль от А) – {(Теневая цена Р1) * (норма расхода Р1 на А) + (Теневая цена Р2) * (норма расхода Р2 на А) + (Теневая цена Р3) * (норма расхода Р3 на А)}

Для каждого вида продукции значения нормированной стоимости:

(Нормированная стоимость продукции А)=60– $(0\cdot1 + 12\cdot4 + 0\cdot6) = 12$

(Нормированная стоимость продукции В)=70 – $(0\cdot1+12\cdot6+0\cdot5) = -2$

(Нормированная стоимость продукции С)=120– $(0\cdot1+12\cdot10+0\cdot4) = 0$

Значения «Целевого коэффициента» для рассматриваемого примера являются показателями единичной прибыли.

В следующих двух столбцах указаны «Допустимое увеличение и уменьшение» целевых коэффициентов без изменения полученного оптимального решения. Так, для нашего случая коэффициент c_1, равный 60, может быть увеличен на 30 порядков (до значения $60+10^{30}$) или уменьшен на 12 единиц (до значения 48) без изменения найденного оптимального решения (при сохранении всех остальных переменных).

Это утверждение легко проверить, повторно решив задачу для любого значения коэффициента c_1 в диапазоне [48, $(60+10^{30})$]. Поскольку $60+10^{30}$ является бесконечно большим числом, то значения c_1 ограничены только снизу. Аналогично определяются диапазоны возможного изменения целевых коэффициентов при остальных переменных (c_2 и c_3).

Вторая таблица содержит информацию по ограничениям. Столбец «Результирующее значение» содержит данные о необходимом количестве ресурсов для оптимального решения. Во 2-м столбце указаны «Теневые цены» на виды ресурсов. Далее – ограничения на объемы используемых ресурсов (сколько их в наличии). Последние два столбца содержат данные о возможном изменении объемов имеющихся ресурсов.

Параметр «Теневая цена» позволяет выяснить, как изменится значение целевой функции, если ослабить то или иное ограничение. Теневая цена ограничения выражает величину изменения целевой функции – прибыли при увеличении имеющегося объема ресурсов данного вида на единицу (при условии, что все остальные переменные не изменятся).

Например, рассмотрим теневую цену на ресурс Р2, который имеет связанное ограничение (используется полностью). Из отчета по устойчивости (рисунок 4) видно, что если увеличивать имеющееся количество ресурса Р2 (100) на некоторую величину, находящуюся в пределах от 0 до 28, максимум итоговой прибыли увеличится на 12 за каждую единицу увеличения объема ресурса Р2. Если же уменьшить Р2 на некоторую величину в пределах от 0 до 52, то максимум итоговой прибыли уменьшится на 12,0 за каждую единицу уменьшения Р2.

Допустим, решено увеличить имеющийся запас Р2 на 25 ед., и вправе ожидать увеличения максимальной прибыли на 12·25=300, т.е. 1244+300=1544. Это можно проверить при повторном решении модели, внеся изменение в ячейку E6 =125 (вместо 100) (рисунок 5).

	A	B	C	D	E	F
1	**План выгодного производства**					
2						
3	Вид ресурса	Ресурсные коэффициенты (по видам продукции)			Запас ресурса (имеется в наличии)	Расход ресурса
4		**A**	**B**	**C**		
5	P1	1,0	1,0	1,0	16,0	15,7
6	P2	4,0	6,0	10,0	125,0	125,0
7	P3	6,0	5,0	4,0	110,0	72,8
8	Единич прибыль	60,0	70,0	120,0		
9						
10	Объем произ-ва	4,0	2,0	9,7		
11						
12	Ограничения по объемам производства					
13	Нижняя граница	1,0	2,0	2,0		
14	Верхняя граница	4,0				
15					**Итоговая прибыль**	
16	Общая прибыль	240,0	140,0	1164,0	1544,0	

Рисунок 5. Решение после увеличения объема ресурса

На рисунке 5 видно, что получены новые значения оптимизируемых переменных $x_1^* = 4$, $x_2^* = 2$, $x_3^* = 9{,}7$, поскольку коррекция одного из ограничений изменила область существования решения.

Таким образом, для увеличения прибыли на 300 ед. путем увеличения объема связанного ресурса Р2 на 25 ед. надо за каждую его дополнительную единицу платить надбавку, максимальная величина которой равна теневой цене: 300 / 25 = 12.

Теперь рассмотрим теневые цены на несвязанные ограничения, по которым ресурсы в оптимальном решении используются не полностью (недефицитные ресурсы Р1 и Р3). Например, теневая цена ресурса Р1 равна 0 при возможном увеличении его объема до бесконечности (*допустимое увеличение 1Е+30*) или уменьшении в пределах от 0 до 2,8 (*допустимое уменьшение*) (см рисунок4). При этом максимальное значение итоговой прибыли не изменится. Это связано с тем, что оптимальное решение оставляет 2,8 ед. ресурса Р1 неиспользованными, и дальнейшее увеличение не может улучшить оптимального решения. Отсюда следует, что можно сократить имеющийся объем 16 ед. ресурса Р1 на 2,8 ед., не оказывая влияния на оптимальное решение. Таким же образом можно сократить имеющийся объем 110 ед. Р3 на 47,2 ед. без изменения максимальной итоговой прибыли.

Последнее утверждение можно проверить при повторном решении модели, устанавливая в ячейке Е7 значение объема Р3 в пределах допустимого уменьшения, равное, например, 110 – 40 = 70.

Отчет по пределам

Отчет по пределам содержит оптимальные значения независимых переменных (объемов производства) $x_1^*= 4$, $x_2^* = 2$, $x_3^* = 9,7$ и соответствующее максимальное значение прибыли $F_{\max} = 1544$.

Отчет также показывает, как изменится значение целевой функции, если независимые переменные x_j будут принимать свои предельные (нижние и верхние) значения при условии, что остальные независимые переменные остаются без изменений и выполняются все ограничения (рисунок 6).

Ячейка	Целевое Имя	Значение
$E$16	Общая прибыль Итоговая прибыль	1544,0

Ячейка	Изменяемое Имя	Значение	Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
$B$10	Объем произ-ва A	4,0	1,0	1364,0	4,0	1544,0
$C$10	Объем произ-ва B	2,0	2,0	1544,0	2,0	1544,0
$D$10	Объем произ-ва C	9,7	2,0	620,0	9,7	1544,0

Рисунок 6. Отчет по пределам

Решение оптимизационной задачи после ввода в нее нового вида продукции

Допустим, решено выпустить на рынок новый вид продукции Dс параметрами, как на рисунке 7. Необходимо выяснить, будет ли производство этой продукции прибыльным.

	A	B	C	D	E	F	G
1	План выгодного производства						
2							
3	Вид ресурса	Ресурсные коэффициенты (по видам продукции)				Запас ресурса (имеется в наличии)	Расход ресурса
4		A	B	C	D		
5	P1	1,0	1,0	1,0	1,0	16,0	0,0
6	P2	4,0	6,0	10,0	8,0	125,0	0,0
7	P3	6,0	5,0	4,0	13,0	110,0	0,0
8	Единич прибыль	60,0	70,0	120,0	127,0		
9							
10	Объем произ-ва						
11							
12	Ограничения по объемам производства						
13	Нижняя граница	1,0	2,0	2,0	0,0		
14	Верхняя граница	4,0					
15						Итоговая прибыль	
16	Общая прибыль	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	

Рисунок 7. Исходные данные с вводом нового продукта

	A	B	C	D	E	F	G
1	План выгодного производства						
2							
3	Вид ресурса	Ресурсные коэффициенты (по видам продукции)				Запас ресурса (имеется в наличии)	Расход ресурса
4		A	B	C	D		
5	P1	1,0	1,0	1,0	1,0	16,0	14,9
6	P2	4,0	6,0	10,0	8,0	125,0	125,0
7	P3	6,0	5,0	4,0	13,0	110,0	110,0
8	Единич прибыль	60,0	70,0	120,0	127,0		
9							
10	Объем произ-ва	1,0	2,0	6,8	5,1		
11							
12	Ограничения по объемам производства						
13	Нижняя граница	1,0	2,0	2,0	0,0		
14	Верхняя граница	4,0					
15						Итоговая прибыль	
16	Общая прибыль	60,0	140,0	814,3	653,1	1667,4	

Рисунок 8. Решение оптимизационной задачи с новым продуктом

Решение оптимизационной задачи с введенным новым продуктом представлено на рисунке8.

На рисунке 9 выведен отчет по устойчивости задачи с новым продуктом.

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$10	Объем произ-ва A	1,0	-1,9	60	1,918367347	1E+30
$C$10	Объем произ-ва B	2,0	-10,2	70	10,2244898	1E+30
$D$10	Объем произ-ва C	6,8	0,0	120	38,75	26,36842105
$E$10	Объем произ-ва D	5,1	0,0	127	263	4,272727273

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$G$5	P1 Расход ресурса	14,9	0,0	16	1E+30	1,071428571
$G$6	P2 Расход ресурса	125,0	10,7	125	11,66666667	36,07692308
$G$7	P3 Расход ресурса	110,0	3,2	110	52,5	50,4

Рисунок 9. Отчет по устойчивости задачи с новым продуктом

Выводы

Оптимальный план производства предусматривает выпуск 1 ед. продукции A, 2 ед. продукции B, 6,8 ед. продукции C, 5,1 ед. продукции D. Полученная суммарная прибыль при этом составит 1667,4 д.ед.

Виды продукции A и особенно B являются неэффективными для производства (результирующие значения соответствуют нижней границе ограничений по объемам производства, а нормированные стоимости – отрицательные).

Ресурсы P2 и P3 являются дефицитными, так как используются полностью. Имеется возможность снизить запас недефицитного ресурса P1 на 1,07 ед. без сокращения итоговой прибыли. Для наращивания производства менее рискованным является ослабление (преодоление) ограничения на запасы ресурса P3 (из-за его невысокой теневой цены 3,2 д.ед.).

Введенный в производство новый продукт D эффективен, поскольку его нормированная стоимость неотрицательна (равна нулю).

При исследовании результатов решения оптимизационных задач необходимо учитывать следующие закономерности:

– если результирующие значения оптимизируемых переменных находятся внутри интервала их ограничений, они имеют равный нулю показатель нормированной стоимости;

– при решении задач максимизации переменные, оптимальные значения которых совпадают с нижней границей интервала ограничений, имеют отрицательную или равную нулю нормированную стоимость;

–переменные, оптимальные значения которых совпадают с верхней границей интервала ограничений, имеют положительную или равную нулю нормированную стоимость;

–при решении задач минимизации предыдущие закономерности действуют наоборот;

–теневые цены ресурсов определяют прирост (в задаче минимизации – сокращение) целевой функции при увеличении (в задаче минимизации – при уменьшении) на единицу имеющегося объема дефицитных ресурсов;

– недефицитные ресурсы имеют нулевую теневую цену;

– виды продукции, имеющие отрицательную нормированную стоимость, являются неэффективными для производства.

2.2 Динамическое программирование

Динамическое программирование (далее – ДП) – один из разделов оптимального программирования, в котором процесс принятия решения и управления может быть разбит на отдельные этапы. На каждом из этапов решение некоторой частной задачи, обусловленной исходной.

Предположим, что физическая система S находится в некотором состоянии S_0 принадлежащее S_0 (вектор) и является управляемой. Благодаря осуществлению некоторого управления U указанная система переходит из начального состояния S_0 в конечное состояние $S_{кон}$, принадлежащее S_k (вектор).

При этом качество каждого из реализуемых управлений U характеризуется соответствующим значением функции $W(U)$.

Задача состоит в то, чтобы из множества возможных управлений U найти такое U^*, при котором функция $W(U)$ принимает экстремальное значение $W(U^*)$.

Экономический процесс является управляемым, если можно влиять на ход его развития. Под управлением понимается совокупность решений, принимаемых на каждом этапе, для влияния на ход развития процесса. Например, выпуск продукции предприятием – управляемый процесс. Совокупность решений, принимаемых в начале года (квартала и т.д.) по обеспечению предприятия сырьем, замене оборудования, финансированию и т.д., является управлением. Необходимо организовать выпуск продукции так, чтобы принятые решения на отдельных этапах способствовали получению максимально возможного объема продукции или прибыли.

ДП позволяет свести одну сложную задачу со многими переменными ко многим задачам с малым числом переменных. Это значительно сокращает объем вычислений и ускоряет процесс принятия управленческого решения.

В отличие от ЛП, в котором симплексный метод является универсальным, в ДП универсального метода не существует.

Одним из основных методов ДП является метод рекуррентных соотношений (т.е. соотношений, выражающих n–й член последовательности через предыдущие), который основывается на использовании принципа оптимальности, разработанного американским математиком Р. Беллманом, благодаря которому выполняется первое условие для задач ДП.

Принцип состоит в том, что, каково бы ни было начальное состояние на любом шаге и управление, выбранное на этом шаге, последующие управления должны выбираться оптимальными относительно состояния, к которому придет система в конце данного шага. Использование данного принципа гарантирует, что управление, выбранное на любом шаге, не локально лучше, а лучше с точки зрения процесса в целом.

Из принципа следует, что оптимальную стратегию управления можно получить, если сначала найти оптимальную стратегию управления на n-м шаге, затем на двух последних шагах, затем на трех последних шагах и т.д. вплоть до первого шага.

В некоторых задачах, решаемых методом ДП, при распределении на несколько лет ресурсов деятельности предприятия, шагом целесообразно считать временной период; при распределении средств между предприятиями – номер очередного предприятия. В других задачах разбиение на шаги вводится искусственно. Например, непрерывный управляемый процесс можно рассматривать как дискретный, условно разбив его на временные отрезки (шаги). Исходя из условий каждой конкретной задачи, длину шага выбирают таким образом, чтобы на каждом шаге получить простую задачу оптимизации и обеспечить требуемую точность вычислений.

К задачам, решаемым методами динамического программирования, можно отнести задачи нахождения оптимальной стратегии замены оборудования, оптимального распределения ресурсов и другие.

Задача определения оптимальной стратегии замены оборудования

Одной из важных экономических проблем является определение оптимальной стратегии в замене старых станков, агрегатов, машин на новые.

Старение оборудования включает его физический и моральный износ, в результате чего растут производственные затраты по выпуску продукции на старом оборудовании, увеличиваются затраты на его ремонт и обслуживание, снижаются производительность и ликвидная стоимость. Наступает время, когда старое оборудование выгоднее продать, заменить новым, чем эксплуатировать ценой больших затрат.

Оптимальная стратегия замены оборудования состоит в определении оптимальных сроков замены. Критерием оптимальности при этом может служить прибыль от эксплуатации оборудования, которую следует оптимизировать, или суммарные затраты на эксплуатацию в течение рассматриваемого промежутка времени, подлежащие минимизации.

Введем обозначения:

$r(t)$ – стоимость продукции, производимой за один год на единице оборудования возраста t лет;

$u(t)$ – ежегодные затраты на обслуживание оборудования возраста t лет;

$s(t)$ – остаточная стоимость оборудования возраста t лет;

P– покупная цена оборудования.

Рассмотрим период N лет, в пределах которого требуется определить оптимальный цикл замены оборудования.

Обозначим через $f_N(t)$ максимальный доход, получаемый от оборудования возраста t лет за оставшиеся N лет цикла использования оборудования при условии оптимальной стратегии.

Возраст оборудования отсчитывается в направлении течения процесса. Так, $t = 0$ соответствует случаю использования нового оборудования. Временные же стадии процесса нумеруются в обратном направлении по отношению к ходу процесса. Так, $t = 1$ относится к одной временной стадии, остающейся до завершения процесса, а $t = N$ – к началу процесса (рисунок 10).

Рисунок 10. Цикл замены оборудования

На каждом этапе N-стадийного процесса должно быть принято решение о сохранении или замене оборудования. Выбранный вариант должен обеспечивать получение максимальной прибыли. Функциональные уравнения, основанные на принципе оптимальности, имеют вид:

$$f_N(t) = \max\begin{bmatrix} r(t) - u(t) + f_{n-1}(t+1) \\ s(t) - P + r(0) - f_{N-1}(1) \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

$$f_1(t) = \max\begin{bmatrix} r(t) - u(t) \\ s(t) - P + r(0) - u(0) \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Уравнение (2.4) описывает N-стадийный процесс, а (2.5) – одностадийный. Оба уравнения состоят из двух частей: верхняя строка определяет доход, получаемый при сохранении оборудования; нижняя – доход, получаемый при замене оборудования и продолжении процесса работы на новом оборудовании.

В уравнении (2.4) функция $r(t)$-$u(t)$ есть разность между стоимостью произведенной продукции и эксплуатационными издержками на *N-й* стадии процесса.

Функция $f_{N-1}(t+1)$ характеризует суммарную прибыль от $(N-1)$ оставшихся стадий для оборудования, возраст которого в начале осуществления этих стадий составляет $(t + 1)$ лет.

Нижняя строка (2.4) характеризуется следующим образом: функция $s(t) - P$ представляет чистые издержки по замене оборудования, возраст которого t лет.

Функция $r(0)$ выражает доход, получаемый от нового оборудования возраста 0 лет. Предполагается, что переход от работы на оборудовании возраста t лет к работе на новом оборудовании совершается мгновенно, т.е. период замены старого оборудования и переход на работу на новом оборудовании укладываются в одну и ту же стадию.

Последняя функция f_{N-1} в (2.4) представляет собой доход от оставшихся $(N-1)$ стадий, до начала осуществления которых возраст оборудования составляет один год.

Аналогичная интерпретация может быть дана уравнению для одностадийного процесса. Здесь нет слагаемого вида $f_0(t + 1)$, так как N принимает значение 1,2,...,N. Равенство $f_0(t) = 0$ следует из определения функции $f_N(t)$.

Уравнения (2.4) и (2.5) являются рекуррентными соотношениями, которые позволяют определить величину $f_N(t)$ в зависимости от $f_{N-1}(t+1)$. Структура этих уравнений показывает, что при переходе от одной стадии процесса к следующей возраст оборудования увеличивается с t до (t + 1) лет, а число оставшихся стадий уменьшается с N до (N– 1).

Расчет начинают с использования уравнения (2.5). Уравнения (2.4) и (2.5) позволяют оценить варианты замены и сохранения оборудования с тем, чтобы принять тот из них, который предполагает больший доход. Эти соотношения дают возможность не только выбрать линию поведения при решении вопроса о сохранении или замене оборудования, но и определить прибыль, получаемую при принятии каждого из этих решений.

Пример

Определить оптимальный цикл замены оборудования при следующих исходных данных: $P = 10$, $S(t) = 0$, $f(t) = r(t) - u(t)$, представленных в таблице 3.

Таблица 3

Исходные данные для решения задачи ДП

t	*0*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f(t)	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0

Решение

Уравнения (2.4) и (2.5) запишем в следующем виде:

$$f_N(t) = \max\begin{bmatrix} f(t) + f_{N-1}(t+1) \\ -p + f(0) + f_{N-1}(1) \end{bmatrix},$$

$$f_1(t) = \max\begin{bmatrix} f(t) \\ -p + f(0) \end{bmatrix}.$$

Для N=1

$$f_1(0) = \max\begin{bmatrix} f(0) \\ -p + f(0) \end{bmatrix} = \max\begin{bmatrix} 10 \\ -10+10 \end{bmatrix},$$

$$f_1(1) = \max\begin{bmatrix} f(1) \\ -p + f(0) \end{bmatrix} = \max\begin{bmatrix} 9 \\ -10+10 \end{bmatrix} = 9,$$

……………………..

$$f_1(12) = \max\begin{bmatrix} f(12) \\ -p + f(0) \end{bmatrix} = \max\begin{bmatrix} 0 \\ -10+10 \end{bmatrix} = 0.$$

Для N =2

$$f_2(0) = \max\begin{bmatrix} f(0) + f_1(1) \\ -p + f(0) + f_1(1) \end{bmatrix} = \max\begin{bmatrix} 10+9 \\ -10+10+9 \end{bmatrix},$$

$$f_2(1)=\max\begin{bmatrix} f(0)+f_1(1) \\ -p+f(0)+f_1(1) \end{bmatrix}=\max\begin{bmatrix} 9+8 \\ -10+10+9 \end{bmatrix}.$$

Вычисления продолжаем до тех пор, пока не будет выполнено условие $f_1(1)<f_2(2)$, т.е. в данный момент оборудование необходимо заменить, так как величина прибыли, получаемая в результате замены оборудования, больше, чем в случае использования старого. Результаты расчетов помещаем в таблицу, момент замены отмечаем звездочкой, после чего дальнейшие вычисления по строчке прекращаем.

Можно не решать каждый раз уравнение (2.5), а вычисления проводить в таблице. Например, вычислим $f_4\{t)$:

$f_4(0)=f_1(0)+f_3(1)=10+24=34>f_3(1)=24,$

$f_4(1)=f_1(1)+f_3(2)=9+21=30,$

$f_4(2)=f_1(2)+f_3(3)=8+18=26,$

$f_4(3)=f_1(3)+f_3(4)=7+17=24,$

$f_4(4)=f_1(4)+f_3(5)=6+17=23.$

Дальнейшие расчеты для $f_4(t)$ прекращаем, так как $f_4(4) = 23 < f_3(1) = 24$.

Таблица 3

Расчеты задачи ДП

$F_N(t)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	N	N-1	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$F_1(t)$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0
$F_2(t)$	19	17	15	13	11	9	9^*						
F3(t)	27	24	21	18	17	17^*							
$F_4(t)$	34	30	26	24	24^*								
$F_5(t)$	40	35	32	31	30	30^*							
$F_6(t)$	45	41	39	37	36	35	35^*						
$F_7(t)$	51	48	45	43	41	41^*							
$F_8(t)$	58	54	51	48	48^*								
$F_9(t)$	64	60	56	55	54	54^*							
$F_{10}(t)$	70	65	63	61	60	60^*							
$F_{11}(t)$	75	72	69	67	66	65	65^*						
$F_{12}(t)$	82	78	75	73	72	72^*							

По результатам вычислений и по линии, разграничивающей области решений сохранения и замены оборудования, находим оптимальный цикл замены оборудования. Для данной задачи он составляет 4 года (таблица 3).

Ответ: Для получения максимальной прибыли от использования оборудования оптимальный цикл состоит в замене оборудования через каждые 4 года.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение линейного программирования.
2. Представьте постановку и математическую модель задачи ЛП.
3. Дайте определения целевой функции, стандартной и канонической задачи ЛП.
4. Дайте определения допустимого решения (плана), оптимального плана.
5. Представьте определения выпуклой линейной комбинации, выпуклого множества, многогранника решений и опорного плана.
6. Сформулируйте свойства основной задачи ЛП.
7. Дайте понятие двойственной задачи.
8. Приведите определение теневой цены (оценки, двойственной оценки).
9. Представьте виды двойственных оценок.
10. Сформулируйте первую теорему двойственности.
11. Сформулируйте вторую теорему двойственности.
12. Приведите правила оценки оптимального плана по двойственным оценкам основных переменных.
13. Перечислите правила оценки оптимального плана по двойственным оценкам ограничений типа (≤).
14. Приведите правила оценки оптимального плана по двойственным оценкам ограничений типа(≥).
15. Перечислите закономерности в результатах решения оптимизационных задач.
16. Представьте понятие и постановку динамического программирования.
17. Сформулируйте принцип оптимальности Беллмана.
18. Приведите постановку задачи определения оптимальной стратегии замены оборудования.
19. Опишите принципы решения задачи определения оптимальной стратегии замены оборудования.

3. СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

3.1 Сетевые модели

До появления сетевых методов планирование работ, проектов осуществлялось в небольшом объеме. Наиболее известным средством такого планирования был ленточный график Ганта, недостаток которого состоит в том, что он не позволяет установить зависимости между различными операциями.

Современное сетевое планирование начинается с разбиения программы работ на операции. Определяются оценки продолжительности операций, и строится сетевая модель (график). Построение сетевой модели позволяет проанализировать все операции и внести улучшения в структуру модели до начала ее реализации. Строится календарный график, определяющий начало и окончание каждой операции, а также взаимосвязи с другими операциями графика. Календарный график выявляет критические операции, которым надо уделять особое внимание, чтобы закончить все работы в директивный срок. Что касается некритических операций, то календарный план позволяет определить резервы времени, которые можно выгодно использовать при задержке выполнения работ или эффективном применении как трудовых, так и финансовых ресурсов.

Сетевая модель – графическое изображение плана выполнения комплекса работ, состоящего из нитей (работ) и узлов (событий), которые отражают логическую взаимосвязь всех операций. В основе сетевого моделирования лежит изображение планируемого комплекса работ в виде графа. Граф-схема состоит из заданных точек (вершин), соединенных системой линий. Отрезки, соединяющие вершины, называются ребрами (дугами) графа. Ориентированным называется такой граф, на котором стрелкой указаны направления всех его ребер (дуг), что позволяет определить, какая из двух его граничных вершин является начальной, а какая –конечной. Исследование таких сетей проводится методами теории графов.

Теория графов оперирует понятием пути, объединяющим последовательность взаимосвязанных ребер. Контур означает такой путь, у которого начальная вершина совпадает с конечной. Сетевой график – это ориентированный граф без контуров. В сетевом моделировании имеются два основных элемента –работа и событие.

Работа – это активный процесс, требующий затрат ресурсов, либо пассивный (ожидание), приводящий к достижению намеченного результата.

Фиктивная работа – это связь между результатами работ (событиями), не требующая затрат времени и ресурсов.

Событие – это результат (промежуточный или конечный) выполнения одной или нескольких предшествующих работ.

Путь – это любая непрерывная последовательность (цепь) работ и событий.

Критический путь – это путь, не имеющий резервов и включающий самые напряженные работы комплекса. Работы, расположенные на критическом пути, называют критическими. Все остальные работы являются некритическими (ненапряженными) и обладают резервами времени, которые позволяют передвигать сроки их выполнения, не влияя на общую продолжительность выполнения всего комплекса работ.

При построении сетевых моделей необходимо соблюдать следующие правила.

1. Сеть изображается слева направо, и каждое событие с большим порядковым номером изображается правее предыдущего. Общее направление стрелок, изображающих работы,

также в основном должно быть расположено слева направо, при этом каждая работа должна выходить из события с меньшим номером и входить в событие с большим номером;

2. Два соседних события могут объединяться лишь одной работой. Для изображения параллельных работ вводятся промежуточное событие и фиктивная работа;

3. В сети не должно быть тупиков, т.е. промежуточных событий, из которых не выходит ни одна работа;

4. В сети не должно быть промежуточных событий, которым не предшествует хотя бы одна работа;

5. В сети не должно быть замкнутых контуров, состоящих из взаимосвязанных работ, создающих замкнутую цепь. Для правильной нумерации событий поступают следующим образом: нумерация событий начинается с исходного события, которому дается номер 1. Из исходного события 1 вычеркивают все исходящие из него работы, на оставшейся сети вновь находят событие, в которое не входит ни одна работа. Этому событию дается номер 2. Затем вычеркивают работы, выходящие из события 2, и вновь находят на оставшейся части сети событие, в которое не входит ни одна работа, ему присваивается номер 3, и так продолжается до завершающего события.

3.2 Временные параметры сетевых графиков

Продолжительность выполнения работ устанавливается на основании действующих нормативов или по экспертным оценкам специалистов. В первом случае временные оценки являются детерминированными (однозначными), во втором –стохастическими (вероятностными).

Рассмотрим в качестве примера программу создания нового бытового прибора, пользующегося спросом у населения. Необходимые данные приведены в таблице 4.

Таблица 4

Исходные данные по созданию прибора

Операции	Наименование работы	Непосредственно предшествующие операции	Продолжительность, недели
А, Б	Разработка технической документации (ТД) на прибор и его электронную часть	-	А-3, Б-2
В, Г	Разработка технологической документации на электронную часть прибора и прибор	А, Б	В-2, Г-2
Д	Передача ТД на прибор	А	3
Е	Изготовление приборов	В	7
Ж	Изготовление электронной части прибора	Д Г	3
З,К	Разработка ТД на эксплуатацию прибора и электронную часть	Г, В	З-5, К-2
И	Сборка и испытания прибора	Е, Ж	6

На основании данных таблицы построим сетевой график создания прибора с учетом вышеизложенных рекомендаций (рисунок 11).

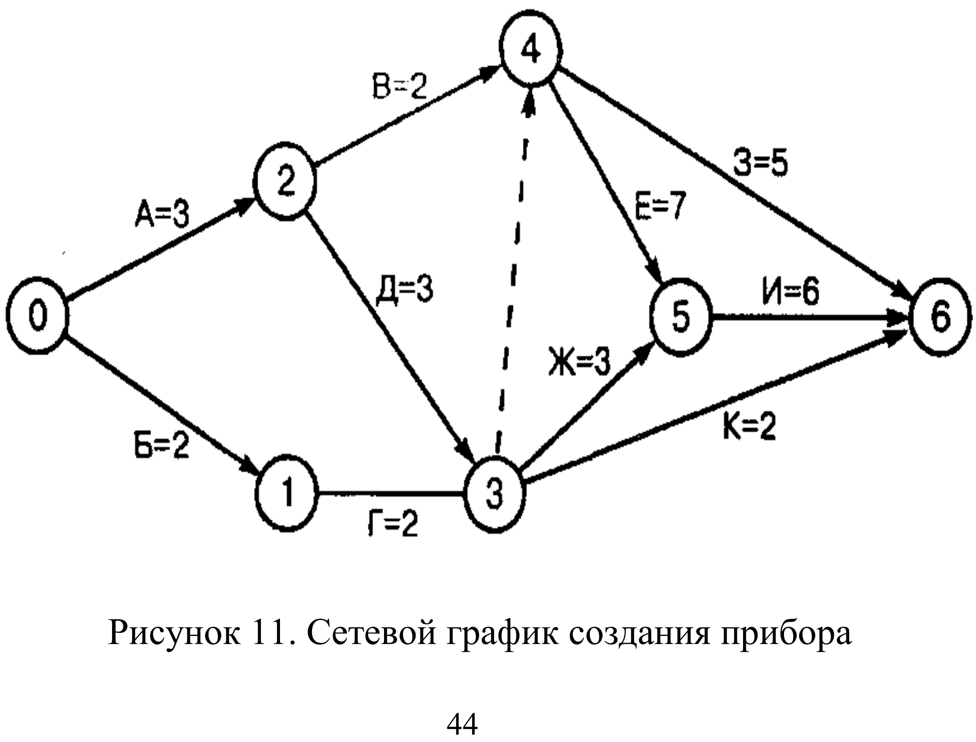

Рисунок 11. Сетевой график создания прибора

Основным временным параметром сетевого графика является продолжительность критического пути.

Расчет критического пути включает два этапа. Первый называется прямым проходом. Вычисления начинают с исходного события и продолжают до тех пор, пока не будет достигнуто завершающее событие. Для каждого события определяется одно число, представляющее ранний срок его наступления. На втором этапе, называемом обратным проходом, вычисления начинают с завершающего события и продолжают, пока не будет достигнуто исходное событие. Для каждого события вычисляется поздний срок его наступления.

Рассмотрим прямой проход:

$t_i^{\text{р.н.}}$–ранний срок начала всех операций, выходящих из события i.

Если $i = 0$, то $t_0^{\text{р.н.}} = 0$;

$t_j^{\text{р.н.}}$–ранний срок начала всех операций, входящих в j.

Тогда

$$t_j^{р.н.} = \max_{i} (t_i^{р.н.} + t_{ij}) \text{ для всех } (i,j), \tag{3.1}$$

где t_{ij}–продолжительность операции (i,j);

$t_1^{р.н} = t_0^{р.н} + t_{0?1} = 0 + 2 = 2;$ $t_2^{р.н} = t_0^{р.н} + t_{0,2} = 0 + 3 = 3;$

$t_3^{р.н} = \max\limits_{i=1,2}\{6+3, 6+7\} = 6;$ $t_4^{р.н} = \max\limits_{i=2,3}\{3+2, 6+0\};$

$t_5^{р.н} = \max\limits_{i=3,4}\{6+3, 6+7\} = 13;$ $t_5^{р.н} = \max\limits_{i=3,4,5}\{6+2, 6+5, 13+6\} = 19.$

Если $i = n$, где n –завершающее событие сети, то $t_n^{\text{п.о}} = t_n^{\text{р.н.}}$ и является отправной точкой обратного прохода;

$$t_i^{\text{п.о}} = \min_{j} (t_j^{\text{п.о}} - t_{i,j}) \text{ для всех операций } (i,j); \tag{3.2}$$

$t_1^{п.о} = t_6^{р.н} = 19;$ $t_5^{п.о} = t_6^{п.о} - t_{5,6} = 19 - 6 = 13;$

$t_4^{п.о} = \min\limits_{j=5,6}\{19-5, 13-7\} = 6;$ $t_3^{п.о} = \min\limits_{j=4,5,6}\{19-2, 13-3, 6-0\} = 6;$

$t_2^{п.о} = \min\limits_{j=3,4}\{6-3, 6-2\} = 3;$ $t_1^{п.о} = t_3^{п.о} - t_{1,3} = 6 - 2 = 4;$

$$t_0^{n.o} = \min_{j=1,2}\{3-3{,}4-2\} = 0.$$

Используя результаты вычислений при прямом и обратном проходах, можно определить операции критического пути. Операция *(i, j)* принадлежит критическому пути, если она удовлетворяет условиям:

$$t_i^{P.H} = t_i^{П.O}, \tag{3.3}$$
$$t_j^{P.H} = t_j^{П.O},$$
$$t_j^{P.H} - t_i^{P.H} = t_j^{П.O} - t_i^{П.O} = t_{ij}$$

Для рассматриваемого примера критический путь включает операции (0,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6).

Операции связаны еще с двумя сроками:

$t_{ij}^{\text{п.н.}}$–поздний срок начала работы. Он является наиболее поздним (максимальным) из допустимых моментов начала данной работы, при котором еще возможно выполнение всех последующих работ в установленный срок:

$$t_{ij}^{п.н} = t_j^{п.о} - t_{ij}, \tag{3.4}$$

$t_{ij}^{\text{р.о}}$ – ранний срок окончания работы. Он является наиболее ранним (минимальным) из возможных моментов окончания работы при заданной продолжительности работ:

$$t_{ij}^{р.о} = t_i^{р.н} + t_{ij}\,. \tag{3.5}$$

Различают два вида резервов времени: полный резерв ($r_{\text{п}}$) и свободный резерв ($r_{\text{св}}$).

Полный резерв времени показывает, на сколько может быть увеличена сумма продолжительности всех работ относительно критического пути. Он представляет собой разность между максимальным отрезком времени, в течение которого может быть выполнена операция, и ее продолжительностью (t_{ij}) и определяется как $t_{ij}^{п.н} - t_i^{р.н}$.

Свободный резерв времени –максимальное время, на которое можно отсрочить начало или увеличить продолжительность работы при условии, что все события наступают в ранние сроки:

$$r_{св\,ij} = t_j^{Р.Н} - t_i^{Р.Н} - t_{ij}. \qquad (3.6)$$

Результаты расчета критического пути и резервов времени некритических операций представлены в таблице 5. Следует отметить, что критические операции должны иметь нулевой полный резерв времени, при этом свободный резерв также должен быть равен нулю.

Таблица 5

Расчет временных параметров сетевого графика

Работа (i, j)	Продолжительность t_{ij}	Раннее		Позднее		Полный резерв $r_п$	Свободный резерв $r_{св}$
		начало $t_j^{р.н}$	окончание $t_{ij}^{р.о}$	начало $t_{ij}^{п.н}$	окончание $t_j^{п.о}$		
1	2	3	4	5	6	7	8
(0,1)	2	0	2	2	4	2	0
(0,2)	3	0	3	0	3	$0^к$	0
(1,3)	2	2	4	4	6	2	2
(2,3)	3	3	6	3	6	$0^к$	0
(2,4)	2	3	5	4	6	1	1
(3,4)	0	6	6	6	6	$0^к$	0
(3,5)	3	6	9	10	13	4	4
(3,6)	2	6	8	17	19	11	11
(4,5)	7	6	13	6	13	$0^к$	0
(4,6)	5	6	11	14	19	8	8
(5,6)	6	13	19	13	19	$0^к$	0

Примечание: к – критические операции

На рисунке 12 показан график примера, рассмотренного выше. Роль полных и свободных резервов при выборе сроков объясняется двумя правилами:

1) Если полный резерв равен свободному, то календарные сроки некритической операции можно выбрать в любой точке между ее ранним началом и поздним окончанием;

2) Если свободный резерв меньше полного, то срок начала

некритической операции можно сдвинуть по отношению к раннему сроку ее начала не более чем на величину свободного резерва.

В вышеуказанном примере правило 2 применимо к операции (0,1), а сроки всех остальных операции выбираются по правилу 1.

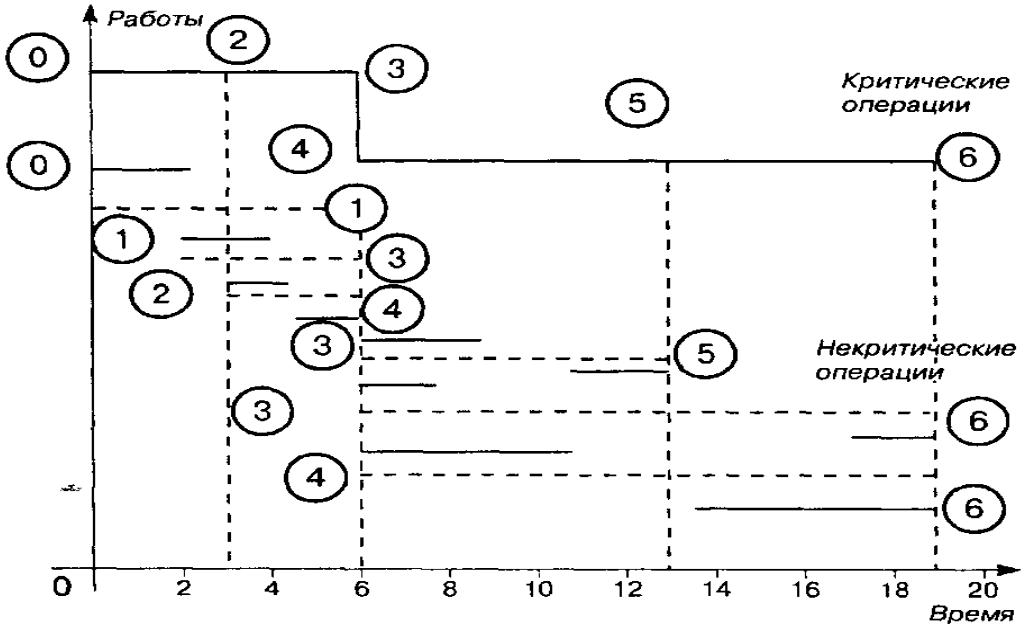

Рисунок 12. График работ по изготовлению прибора
с учетом резервов времени

Конечным результатом выполняемых на сетевой модели расчетов является сетевой график (план). При построении сетевого графика необходимо учитывать наличие ресурсов, так как одновременное выполнение некоторых операций из-за ограничений, связанных с рабочей силой, оборудованием и другими видами ресурсов, иногда оказывается невозможным. Именно в этом отношении представляют ценность полные резервы времени некритических операций.

Сдвигая некритическую операцию в том или ином направлении, но в пределах ее полного резерва времени, можно добиться снижения максимальной потребности в ресурсах. Однако даже при отсутствии ограничений на ресурсы полные резервы времени обычно используются для выравнивания потребностей в ресурсах на протяжении всего срока реализации программы работ. Это означает, что работы удастся выполнить более или менее постоянным составом рабочей силы.

Для работы на компьютере можно использовать программу Microsoft Project. Она реализует календарное планирование на основе сетевых моделей.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте характеристику сетевого планирования.
2. Приведите понятие сетевой модели.
3. Дайте определения сетевого графика, работы, фиктивной работы.
4. Приведите понятия события, пути, критического пути.
5. Перечислите правила построения сетевых моделей.
6. Назовите основные временные параметры сетевого графика.
7. Опишите прямой проход при расчете критического пути.
8. Представьте формулы расчета раннего срока начала операций.
9. Опишите обратный проход при расчете критического пути.
10. Представьте формулы расчета позднего срока окончания операций.
11. Приведите условия принадлежности операций критическому пути.
12. Представьте формулы расчета позднего срока начала работы.
13. Приведите формулы расчета раннего срока окончания работы.
14. Представьте определение и формулу расчета полного резерва времени.
15. Представьте определение и формулу расчета свободного резерва времени.
16. Приведите количественное значение полного и свободного резервов времени для критической операции.
17. Охарактеризуйте роль полных и свободных резервов времени при разработке календарного плана.

4. СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

4.1 Элементы системы массового обслуживания

Многие экономические задачи связаны с *системами массового обслуживания*, т. е. такими системами, в которых, с одной стороны, возникают массовые запросы (требования) на выполнение каких-либо услуг, с другой – происходит удовлетворение этих запросов.

Эти системы объединяет то обстоятельство, что системам необходимо пребывать в состоянии ожидания. Ожидание является следствием вероятностного характера возникновения потребностей в обслуживании и разброса показателей обслуживающих систем.

Цель изучения СМО состоит в том, чтобы взять под контроль некоторые характеристики системы, установить зависимость между числом обслуживаемых единиц и качеством обслуживания. Качество обслуживания тем выше, чем больше число обслуживающих единиц. Но экономически невыгодно иметь лишние обслуживающие единицы.

В промышленности СМО применяются при поступлении сырья, материалов, комплектующих изделий на склад и выдаче их со склада; обработке широкой номенклатуры деталей на одном и том же оборудовании; организации наладки и ремонта оборудования; определении оптимальной численности обслуживающих отделов и служб предприятий и т.д.

Основными элементами СМО являются источники заявок, их входящий поток, каналы обслуживания и выходящий поток.

В зависимости от характера формирования очереди СМО различают:

1) системы с отказами, в которых при занятости всех каналов обслуживания, заявка не встает в очередь и покидает систему необслуженной;

2) системы с неограниченными ожиданиями, в которых заявка встает в очередь, если в момент ее поступления все каналы были заняты.

Существуют и системы смешанного типа с ожиданием и ограниченной длиной очереди: заявка получает отказ, если приходит в момент, когда все места в очереди заняты. Заявка, попавшая в очередь, обслуживается обязательно.

СМО, допускающие очередь, но с ограниченным числом требований в ней, называются системами с ограниченной длиной очереди.

СМО, допускающие очередь, но с ограниченным сроком пребывания каждого требования в ней, называются *системами с ограниченным временем ожидания.*

По числу каналов обслуживания СМО делятся на одноканальные и многоканальные.

В зависимости от расположения источника требований системы могут быть разомкнутыми (источник заявок находится вне системы) и замкнутыми (источник находится в самой системе).

Примером разомкнутой системы может служить ателье по ремонту телевизоров. Здесь неисправные телевизоры — это источник требований на их обслуживание, находятся вне самой системы, число требований можно считать неограниченным. К замкнутым СМО относится, например, станочный участок, в котором станки являются источником неисправностей, а следовательно, источником требований на их обслуживание, например, бригадой наладчиков.

Рассмотрим элементы СМО.

Входящий поток

На практике наиболее распространенным является простейший поток заявок, обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия.

Стационарность характеризуется тем, что вероятность поступления определенного количества требований (заявок) в течение некоторого промежутка времени зависит только от длины этого промежутка.

Ординарность потока определяется невозможностью одновременного появления двух или более заявок.

Отсутствие последействия характеризуется тем, что поступление заявки не зависит от того, когда и сколько заявок поступило до этого момента. В этом случае вероятность того, что число заявок, поступивших на обслуживание за промежуток времени *t,* равно *k*, определяется по закону Пуассона:

$$P_{k(t)} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \qquad (4.1)$$

где λ – интенсивность потока заявок, т.е. среднее число заявок в единицу времени:

$$\lambda = 1/\tau(чел./мин, р./ч, автом./дн., квт/ч), \qquad (4.2)$$

где τ – среднее значение интервала времени между двумя соседними заявками.

Для такого потока заявок время между двумя соседними заявками распределено экспоненциально с плотностью вероятности:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \qquad (4.3)$$

Случайное время ожидания в очереди начала обслуживания считают распределенным экспоненциально:

$$f(t) = \nu e^{-\nu t}, \qquad (4.4)$$

где ν – интенсивность движения очереди, т.е. среднее число заявок, приходящих на обслуживание в единицу времени:

$$\nu = 1/t_{оч}, \qquad (4.5)$$

где $t_{оч}$ – среднее значение времени ожидания в очереди.

Выходящий поток заявок связан с потоком обслуживания в канале, где длительность обслуживания $t_{обс}$ является случайной величиной и часто подчиняется показательному закону распределения с плотностью:

$$f(t_{обс}) = \mu e^{-\mu t}, \tag{4.6}$$

где μ – интенсивность потока обслуживания, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени:

$$\mu = 1/\bar{t}_{обс} (чел./мин, р./дн.,/кг/ч, докум./дн.),$$

где $t_{обс}$ – среднее время обслуживания.

Важной характеристикой СМО, объединяющей λ и μ, является интенсивность нагрузки:

$$\rho = \lambda / \mu. \tag{4.7}$$

4.2 Системы массового обслуживания с отказами

Рассмотрим n-канальные разомкнутые СМО.

Заявка, поступившая в систему с отказами и нашедшая все каналы занятыми, получает отказ и покидает систему необслуженной. Показателем качества обслуживания выступает вероятность получения отказа. Предполагается, что все каналы доступны в равной степени всем заявкам, входящий поток является простейшим, длительность (время) обслуживания одной заявки $t_{обс}$ распределена по показательному закону.

Формулы для расчета установившегося режима:

1. Вероятность простоя каналов обслуживания, когда нет заявок *(k = 0)*:

$$P_0 = 1/\sum_{k=0}^{n} \rho^k / k!; \tag{4.8}$$

2. Вероятность отказа в обслуживании, когда поступившая на обслуживание заявка найдет все каналы занятыми *(k = n):*

$$P_{отк} = P_n = P_0 \rho^n / n!; \tag{4.9}$$

3. Вероятность обслуживания:

$$P_{обс} = 1 - P_{отк}; \qquad (4.10)$$

4. Среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$\bar{n}_з = \rho P_{обс}; \qquad (4.11)$$

5. Доля каналов, занятых обслуживанием:

$$k_з = \bar{n}_з / n; \qquad (4.12)$$

6. Абсолютная пропускная способность СМО:

$$A = \lambda P_{обс}. \qquad (4.13)$$

Определение эффективности использования трудовых и производственных ресурсов в системах массового обслуживания

Рассмотрим задачу с использованием СМО с отказами.

Пример

В ОТК цеха работают три контролера. Если деталь поступает в ОТК, когда все контролеры заняты обслуживанием ранее поступивших деталей, то она проходит непроверенной. Среднее число деталей, поступающих в ОТК в течение часа, равно 24, среднее время, которое затрачивает один контролер на обслуживание одной детали, равно 5 мин. Определить вероятность того, что деталь пройдет ОТК не обслуженной, насколько загружены контролеры и сколько их необходимо поставить, чтобы $P^*_{обс} \geq 0{,}95$ (* – заданное значение $P_{обс}$).

Решение

По условию задачи λ = 24дет./ч = 0,4дет./мин, $t_{обс}$ = 5 мин, тогда $\mu = 0{,}2$, $\rho = \lambda/\mu = 2$.

1. Вероятность простоя каналов обслуживания:

$$P_0 = \frac{1}{2^{o}0! + 2^1/1! + 2^2/2! + 2^3/3!} = \frac{1}{1 + 2 + 2 + 1{,}3} = 0{,}1587, \text{где } 0! = 1.$$

2. Вероятность отказа в обслуживании: $P_{отк} = 2^3 \cdot \frac{0{,}1587}{3!} = 0{,}21.$

3. Вероятность обслуживания: $P_{обс} = 1 - 0{,}21 = 0{,}79.$

4. Среднее число занятых обслуживанием каналов: $\tilde{n}_з \approx 2 \cdot 0{,}79 = 1{,}58$.

5. Доля каналов, занятых обслуживанием: $k_з = \frac{1{,}58}{3} = 0{,}526$.

6. Абсолютная пропускная способность: $A = 0{,}4 \cdot 0{,}79 = 0{,}316$.

При n = 3 $P_{обс} = 0{,}79 \leq P^*_{обс} = 0{,}95$.

Произведя аналогичные расчеты для n=4, получим: $P_0 = 0{,}14, P_{отк} \approx 0{,}093, P_{обс} = 0{,}907.$

Так как $P_{обс} = 0{,}907 < P^*_{обс} = 0{,}95$, то, произведя расчеты для $n = 5$, получим: $P_0 = 0{,}137$, $P_{отк} = 0{,}035$, $P_{обс} = 0{,}965 \geq P^*_{обс} = 0{,}95$.

Ответ

Вероятность того, что при n = 3 деталь пройдет ОТК необслуженной, составляет 21%, и контролеры будут заняты обслуживанием на 53%.

Чтобы обеспечить вероятность обслуживания более 95%, необходимо не менее пяти контролеров.

4.3 Системы массового обслуживания с ожиданием и ограниченной длиной очереди

Заявка, поступившая в систему с ожиданием с ограниченной длиной очереди и нашедшая все каналы и ограниченную очередь занятыми, покидает систему не обслуженной.

Основной характеристикой качества системы является отказ заявке в обслуживании.

Ограничения на длину очереди могут быть:

1) из-за ограничения сверху времени пребывания заявки в очереди;

2) из-за ограничения сверху длины очереди;

3) из-за ограничения общего времени пребывания заявки в системе.

Формулы для установившегося режима:

1. Вероятность простоя каналов обслуживания, когда нет заявок (k = 0):

$$P_0 = 1 : \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{p^k}{k!} + \frac{p^{n+1}}{n!(n-p)} \left[1 - \left(\frac{p}{n} \right)^m \right] \right\}; \tag{4.14}$$

2. Вероятность отказа в обслуживании:

$$P_{отк} = \frac{\rho^{n+m}}{n! n^m} \cdot P_0; \tag{4.15}$$

3. Вероятность обслуживания:

$$P_{обс} = 1 - P_{отк}; \tag{4.16}$$

4. Абсолютная пропускная способность:

$$A = P_{обс} \cdot \lambda; \tag{4.17}$$

5. Среднее число занятых каналов:

$$\bar{n}_3 = \frac{A}{\mu}; \tag{4.18}$$

6. Среднее число заявок в очереди:

$$\bar{L}_{оч} = \frac{p^{n+1}}{n \cdot n!} \frac{1 - (p/n)^m (m + 1 - mp/n)}{(1 - p/n)^2} P_0; \tag{4.19}$$

7. Среднее время ожидания обслуживания:

$$\bar{t}_{оч} = \frac{\bar{L}_{оч}}{\lambda}; \tag{4.20}$$

8. Среднее число заявок в системе:

$$\bar{Z} = \bar{L}_{оч} + \bar{n}; \tag{4.21}$$

9. Среднее время пребывания в системе:

$$\bar{t}_{смо} = \frac{\bar{Z}}{\lambda}. \tag{4.22}$$

Рассмотрим задачу с применением СМО с ожиданием и с ограниченной длиной очереди.

Пример

Магазин получает ранние овощи из пригородных теплиц. Автомобили с грузом прибывают в разное время с интенсивностью $\lambda = 6$ машин в день. Подсобные помещения и оборудование для подготовки овощей к продаже позволяют обрабатывать и хранить товар, привезенный двумя автомашинами ($m = 2$). В магазине работают три фасовщика ($n = 3$), каждый из которых в среднем может обрабатывать товар с одной машины в течение (среднее) $t_{обс} = 4$ ч. Продолжительность рабочего дня при сменной работе составляет 12 ч.

Определить, какова должна быть емкость подсобных помещений, чтобы вероятность полной обработки товаров $P^*_{обс} \geq 0,97$.

Решение

Определим интенсивность загрузки фасовщиков, авт./дн.:

$\rho = \lambda / \mu = 6/3 = 2$, $\mu = 1/\bar{t}_{обс} = 1 \cdot 12/4 = 3$.

1. Найдем вероятность простоя фасовщиков при отсутствии машин (заявок):

$$P_0 = 1 : \left\{ \frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^{3+1}}{3!(3-2)} \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] \right\} = 0,128, \quad \text{где}$$

$0! = 1$.

2. Вероятность отказа в обслуживании:

$$P_{отк} = P_{n+m} = 0,128 \frac{2^{3+2}}{3!3^2} = 0,075.$$

3. Вероятность обслуживания: $P_{обс} = 1 - 0,075 = 0,925$.

Так как $P_{обс} = 0,925 < P^*_{обс} = 0,97$, произведем аналогичные вычисления для m= 3, получим $P_0 = 0,122$, $P_{отк} = 0,048$, $P_{обс} = 0,952$.

Так как $P_{обс} = 0{,}952 < P^*_{обс} = 0{,}97$, примем m = 4. Для этого случая $P_0 = 0{,}12$, $P_{отк} = 0{,}028$, $P_{обс} = 0{,}972$.

0,972 > 0,97, емкость подсобных помещений необходимо увеличить до m = 4.

Для достижения заданной вероятности обслуживания можно увеличивать число фасовщиков, проводя последовательно вычисления СМО для n = 4; 5 и т.д. Задачу можно решить, увеличивая емкость подсобных помещений, число фасовщиков, уменьшая время обработки товаров.

Найдем остальные параметры СМО для рассчитанного случая при $P_o = 0{,}12$, $P_{отк} = 0{,}028$, $P_{обс} = 0{,}972$.

4. Абсолютная пропускная способность:

$$A = 0{,}972 \cdot 6 = 5{,}832.$$

5. Среднее число занятых обслуживанием каналов (фасовщиков): $\bar{n}_з = \dfrac{5{,}832}{3} = 1{,}944.$

6. Среднее число заявок в очереди:

$$\bar{L}_{оч} = \frac{2^4}{3 \cdot 3!} \frac{1 - (2/3)^4 (4 + 1 - 4 \cdot 2/3)}{(1 - 2/3)^2} \cdot 0{,}12 = 0{,}548.$$

7. Среднее время ожидания обслуживания, дней:

$$\bar{t}_{оч} = \frac{0{,}548}{6} = 0{,}09.$$

8. Среднее число машин в магазине:

$$\bar{z} = 0{,}548 + 1{,}944 = 2{,}492.$$

9. Среднее время пребывания машины в магазине:

$$\bar{t}_{смо} = \frac{2{,}492}{6} = 0{,}415\ дн.$$

Ответ

Емкость подсобных помещений магазина должна вмещать товар, привезенный 4 автомашинами (m = 4), при этом вероятность полной обработки товара будет $P_{обс} = 0{,}972$.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Приведите понятие системы массового обслуживания.
2. Назовите основные элементы СМО.
3. Приведите классификацию СМО.
4. Охарактеризуйте свойства простейшего потока заявок: стационарность, ординарность, отсутствие последействия.
5. Приведите формулу определения числа заявок, поступивших на обслуживание за определенный промежуток времени.
6. Представьте формулы расчета времени между двумя заявками и ожидания в очереди.
7. Приведите характеристики выходящего потока.
8. Охарактеризуйте СМО с отказамии приведите формулы для расчета их показателей.
9. Охарактеризуйте СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди и приведите формулы для расчета их показателей.

5. ТЕОРИЯ МАТРИЧНЫХ ИГР

5.1 Понятия и теоремы теории игр

Задачи выбора решения, когда каждой альтернативе (варианту выбора) соответствует определенный исход, являются задачами выбора в условиях определенности.

В реальных задачах часто приходится иметь дело с ситуацией, когда альтернатива неоднозначно определяет последствия сделанного выбора. Другими словами, имеется набор возможных исходов $y \in Y$, из которых один окажется совмещенным с выбранной альтернативой, но с какой именно – в момент выбора неизвестно, но станет ясно только тогда, когда выбор уже сделан, и ничего изменить нельзя. Хотя с разной альтернативой $x \in X$ связано одно и то же множество исходов Y, для разных альтернатив разные исходы имеют неодинаковое значение.

Задание неопределенности с помощью матрицы

В случае дискретного набора альтернатив и исходов описанную выше ситуацию можно представить в виде матрицы (таблица 6).

Таблица 6

Матрица альтернатив и исходов

$X,\ Y$	y_1	y_2	...	y_j	...	y_m
x_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1m}
x_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2m}
...	...	...	...	...	...	...
x_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{im}
...	...	...	...	...	...	...
x_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nj}	...	a_{nm}

Вектор $y(y_1, \ldots, y_m)$ – это все возможные исходы. Числа a_{ii} выражают оценку ситуации, когда сделан выбор альтернативы x_i и реализовался исход y_i. В разных случаях числа a_{ii} могут иметь различный смысл – выигрыш, потери, платеж.

Возможны два варианта:

1) все строки $a_i(a_{i1},\dots,a_{im})$ одинаковы и проблемы выбора между альтернативами нет;

2) строки различны, следовательно, возникает проблема выбора альтернативы.

В случае непрерывных множеств X и Y ситуация описывается аналогично с помощью задаваемых на этих множествах функциях $a(x,y)$, $x\in X$, $y\in Y$.

Теория игр относится к разделу прикладной математики, исследующей математические модели принятия решений в условиях конфликта, противоречий и неопределенности.

Задачей теории игр является нахождение оптимальной стратегии поведения в условиях конфликта, неопределенности или противодействия какой-то стороны, независимо от того, сознательно или неосознанно это происходит.

Игровые математические модели позволяют не только найти оптимальную стратегию, которая не всегда однозначна, но и оценить каждый вариант решения с различных, иногда противоречивых точек зрения, а так же глубже разобраться во всех сложностях и неопределенностях реальной ситуации для принятия до конца продуманного решения.

Началом теории игр как последовательной математической теории поведения можно считать опубликованную 50 лет назад монографию Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна. Французский математик Э. Мулен характеризует значение теории игр как набор инструментов для построения моделей в экономических и политических теориях.

Основные определения

Конфликт – это противоречие, вызванное противоположными интересами сторон.

Конфликтная ситуация – ситуация, в которой участвуют стороны интересы которых полностью или частично противоположны.

Игра – это действительный или формальный конфликт, в котором имеется по крайней мере два участника, каждый из которых стремится к достижению собственных целей

Правилами игры называют допустимые действия каждого из игроков, направленные на достижение некоторой цели.

Платежом называется количественная оценка результатов игры.

Парная игра – игра, в которой участвуют только две стороны (два игрока).

Игра с нулевой суммой – парная игра, при которой сумма платежа равна нулю, т.е. когда проигрыш одного игрока равен выигрышу другого.

Стратегия игрока – это однозначный выбор игрока в каждой из возможных ситуаций, когда этот игрок должен сделать личный ход.

Оптимальная стратегия – это такая стратегия игрока, которая при многократном повторении игры обеспечивает ему максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш.

Пусть мы имеем парную игру с нулевой суммой, один игрок может выбрать при данном ходе i -ю стратегию из m своих возможных $(i = 1,..., m)$, а второй, не зная выбора первого j -ю стратегию из n своих возможных стратегий $(j = 1, ..., n)$. В результате первый игрок выигрывает величину a_{ij}, а второй проигрывает эту величину. Из этих величин составим матрицу A:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Платежная матрица – так называется матрица A или матрица игры.

Конечной игрой размерности $(m \times n)$ называется игра, определенная матрицей A, имеющей m строк и n столбцов.

Максимином или нижней ценой игры называется число $\alpha = \max_i(\min_j a_{ij})$, а соответствующая ему стратегия (строка) *максиминной.*

Минимаксом или верхней ценой игры называется число $\beta = \min_j(\max_i a_{ij})$, а соответствующая ему стратегия (столбец) *минимаксной*.

Теорема 1. Нижняя цена игры всегда не превосходит верхнюю цену игры.

Игрой с седловой точкой называется игра, для которой $\alpha = \beta$.

Ценой игры называется величина ν, если $\nu = \alpha = \beta$.

В случае игры с седловой точкой игрокам выгодно придерживаться максиминной и минимаксной стратегий и не выгодно отклоняться от них. В таких случаях про игру говорят, что в ней имеет место *равновесие в чистых стратегиях*.

Возможна игра и с несколькими седловыми точками. Тогда игра имеет несколько оптимальных решений, но с одинаковой ценой игры.

Чаще встречаются матричные игры без седловой точки, когда $\alpha < \beta$, и тогда для нахождения её решения используются смешанные стратегии.

Смешанной стратегией игрока называется вектор, каждая из компонент которого показывает относительную частоту использования игроком соответствующей чистой стратегии.

Теорема 2. (Основная теорема теории матричных игр). Всякая матричная игра с нулевой суммой имеет решение в смешанных стратегиях.

Теорема 3. Если один из игроков применяет оптимальную смешанную стратегию, то его выигрыш равен цене игры ν вне зависимости от того, с какими частотами будет применять второй игрок свои стратегии (в том числе и чистые стратегии).

Примеры решения задач при парной игре с нулевой суммой

Пример 1

Найти решение игры, заданной матрицей *A*:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение

Проверим наличие седловой точки в данной матрице. Для этого найдем нижнюю и верхнюю цену игры.

Минимальные элементы по строкам равны (2 и 3) тогда нижняя цена игры $\alpha = \max(2; 3) = 3$. Максимальные элементы по столбцам равны (3 и 6) тогда верхняя цена игры $\beta = \min(3; 6) = 3$. Отсюда видно, что $\alpha = \beta = 3$ и мы имеем седловую точку $a_{21} = 3$, т.е. задача имеет решение в чистых стратегиях.

Оптимальные чистые стратегии для первого и второго игроков равны соответственно $U^* = (0; 1)$, $Z^* = (1; 0)$, а цена игры $\nu = 3$.

Пример 2

Найти решение игры, заданной матрицей *A:*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение

Прежде всего проверим наличие седловой точки в данной матрице.

Для этого найдем нижнюю и верхнюю цену игры.

Минимальные элементы по строкам равны (2 и 3) тогда нижняя цена игры $\alpha = \max(2; 3) = 3$. Максимальные элементы по столбцам равны (4 и 6) тогда верхняя цена игры $\beta = \min(4; 6) = 4$. Отсюда видно, что $\alpha < \beta$ и мы имеем игру, которая имеет решение в смешанных стратегиях, а цена игры $\alpha \le \nu \le \beta$.

Предположим, что для первого игрока смешанная стратегия задается вектором $U = (u_1; u_2)$. Первый игрок, если придерживается своей оптимальной стратегии, независимо от стратегии второго игрока получает цену игры ν:

$4u_1^* + 3u_2^* = \nu;$

$2u_1^* + 6u_2^* = \nu.$

Кроме этого, относительные частоты связаны условием:

$u_1^* + u_2^* = 1.$

Решим полученную систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Получим оптимальную стратегию первого игрока и цену игры:

$U^* = (u_1^*; u_2^*) = (3/5; 2/5), \ \nu = 18/5.$

Составим уравнения для нахождения оптимальной стратегии второго игрока, если при любой чистой стратегии первого, второй проигрывает цену игры:

$4z_1^* + 2z_2^* = \nu = 18/5;$

$3z_1^* + 6z_2^* = \nu = 18/5.$

Решим полученную систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Получим оптимальную стратегию второго игрока:

$Z^* = (z_1^*; z_2^*) = (4/5; 1/5).$

Рассмотрим геометрическую интерпретацию этой задачи в смешанных стратегиях. Для этого в плоскости введем систему координат и на горизонтальной оси Ou отложим вероятность применения первым игроком его двух стратегий, сумма этих вероятностей равна 1, поэтому весь график расположится на отрезке единичной длины. В точках 0 стратегия (1; 0), а в 1 стратегия (0; 1) (рисунок 13).

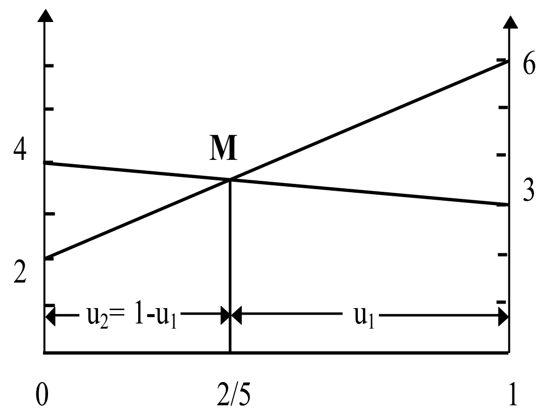

Рисунок 13. Геометрическая интерпретация решения игры в смешанных стратегиях

По оси ординат в точке 0 отложим выигрыши первого игрока по первой его стратегии при обеих стратегиях второго, а в точке 1 при второй стратегии первого игрока. Соединим эти платежи по столбцам, тогда пересечение прямых дадут решение системы уравнений, а ордината этой точки цену игры ν.

Аналогично можно построить график для нахождения оптимальной стратегии второго игрока.

Мы рассмотрели только самый простой вариант парной матричной игры с нулевой суммой, но она достаточно наглядно показывает, что иногда можно количественно оценить и выбрать оптимальный вариант поведения в конфликтной ситуации.

5.2 Игры с природой

В рассмотренных выше матричных играх принимали участие два игрока, интересы которых противоположны. Поэтому действия каждого игрока направлены на увеличение выигрыша (уменьшение проигрыша). Однако в некоторых задачах, приводящихся к игровым, имеется неопределенность, вызванная отсутствием информации об условиях, в которых осуществляется действие (погода, покупательский спрос и т.д.). Эти условия зависят не от сознательных действий другого игрока, а от объективной действительности. Такие игры называются *играми с природой*.

Человек в играх с природой старается действовать осмотрительно, второй игрок (природа, покупательский спрос) действует случайно.

Условия игры задаются матрицей $\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$.

Имеется ряд *критериев*, которые используются при выборе оптимальной стратегии. Рассмотрим некоторые из них.

1. Критерий Вальде. Рекомендуется применять максиминную стратегию. Она достигается из условия $\max\min a_{ij}$ и совпадает с нижней ценой игры. Критерий является пессимистическим, считается, что природа будет действовать наихудшим для человека образом.

2. Критерий максимума. Он выбирается из условия $\max\max a_{ij}$. Критерий является оптимистическим, считается, что природа будет наиболее благоприятна для человека.

3. Критерий Гурвица. Критерий рекомендует стратегию, определяемую по формуле:

$$\max\left\{\alpha\min a_{ij}+\left(1-\alpha\right)\max a_{ij}\right\}, \tag{5.1}$$

где α – степень оптимизма – изменяется в диапазоне [0, 1].

Критерий придерживается некоторой промежуточной позиции, учитывающей возможность как наихудшего, так и наилучшего для человека поведения природы. При $\alpha = 1$ критерий превращается в критерий Вальде, при α = 0 – в критерий максимума. На α оказывает влияние степень ответственности лица, принимающего решение по выбору стратегии. Чем хуже последствия ошибочных решений, больше желания застраховаться, тем *a* ближе к единице.

4. Критерий Сэвиджа. Суть критерия состоит в выборе такой стратегии, чтобы не допустить чрезмерно высоких потерь, к которым она может привести. Находится матрица рисков, элементы которой показывают, какой убыток понесет человек (фирма), если для каждого состояния природы он не выберет наилучшей стратегии.

Элемент матрицы рисков (r_{ij}) находится по формуле:

$$r_{ij} = max\, a_{ij} - a_{ij}, \tag{5.2}$$

где $max\ a_{ij}$ – максимальный элемент в столбце исходной матрицы.

Оптимальная стратегия находится из выражения:

$$min\left\{max\left(max\, a_{ij} - a_{ij}\right)\right\}. \tag{5.3}$$

Определение производственной программы предприятия в условиях риска и неопределенности с использованием матричных игр

Фирма «Фармацевт» – производитель медикаментов и биомедицинских изделий в регионе. Известно, что пик спроса на некоторые лекарственные препараты приходится на летний период (препараты сердечно-сосудистой группы, анальгетики), на другие – на осенний и весенний периоды (антиинфекционные, противокашлевые).

В связи с возможными изменениями погоды ставится задача – определить стратегию фирмы в выпуске продукции, обеспечивающую максимальный доход от реализации (таблица 7).

Таблица 7

Исходные данные для решения игры с природой

Показатели	1 группа препаратов	2 группа препаратов
Спрос при теплой погоде, ед.	3050	1100
Спрос при холодной погоде, ед.	1525	3690
Цена, руб.	40	30
Затраты на 1 ед. продукции за сентябрь– октябрь, руб.	20	15

Решение

Фирма располагает двумя стратегиями:

A_1 – в этом году будет теплая погода;

A_2 – погода будет холодная.

У погоды также две стратегии:

B_1 – погода теплая;

B_2 – погода холодная.

Рассчитаем доход фирмы при различных сочетаниях стратегий фирмы и погоды.

1) *A1*, *B1* – если фирма примет стратегию A_1 и в действительности будет теплая погода (стратегия природы B_1), то выпущенная продукция (3050 ед. препаратов первой группы и 1100 ед. второй группы) будет полностью реализована и доход составит:

$$3050\cdot(40-20)+1100\cdot(30-15)=77500;$$

2) *A1*, *B2* – в условиях прохладной погоды (стратегия природы B_2) препараты второй группы будут проданы полностью, а первой группы только в количестве 1525 ед. и часть препаратов останется нереализованной). Доход составит:

$$1525\cdot(40-20)+1100\cdot(30-15)-20\cdot(3050-1525)=16500;$$

3) *A2*, *B2* – если фирма примет стратегию A_2 и в действительности будет холодная погода, то доход составит

$$1525\cdot(40-20)+3690\cdot(30-15)=85850;$$

4) *A2*, *B1* – при теплой погоде доход фирмы составит:

$$1525\cdot(40-20)+1100\cdot(30-15)-(3690-1100)\cdot15=8150.$$

Рассматривая фирму и погоду в качестве двух игроков, получим платежную матрицу:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 77500 & 16500 \\ 8150 & 85850 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\alpha = max(16500{,}8150) = 16500;$$

$$\beta = min(77500{,}85850) = 77500.$$

Цена игры лежит в диапазоне $16500 \leq v \leq 77500$.

Из платежной матрицы видно, что при всех условиях доход фирмы будет не меньше 16500 руб., но если погодные условия совпадут с выбранной стратегией, то доход фирмы может составить 77500 руб.

Найдем решение игры. Применим оптимальную смешанную стратегию.

Обозначим частоту применения фирмой стратегии A_1 через x, тогда частота применения им стратегии A_2 будет равна $(1- x)$.

Если фирма примет оптимальную смешанную стратегию, то при любой погоде она должна получить одинаковый доход, что отражено в равенстве:

$77500x + 8150(1-x) = 16500x + 85850(1-x)$.

Получим $x = 0{,}56$, $(1-x) = 0{,}44$ или $x_{опт} = (0{,}56; 0{,}44)$.

Оптимальный план производства лекарственных препаратов составит:

$0{,}56 \cdot 3050 + 0{,}44 \cdot 1525 = 2379$ ед. 1 группы;

$0{,}56 \cdot 1100 + 0{,}44 \cdot 3690 = 2239$ед. 2 группы.

Таким образом, фирме целесообразно производить в течение сентября и октября 2379 ед. препаратов первой группы и 2239,6 ед. препаратов второй группы.

Тогда при любой погоде она получит доход:

при теплой погоде: $77500 \cdot 0{,}56 + 8150 \cdot 0{,}44 = 46\,986$ руб.; при холодной погоде: $16500 \cdot 0{,}56 + 85850 \cdot 0{,}44 = 46\,986$ руб.

При этом цена игры v = 46 986 руб.

Критерии, используемые при неопределенности

В условиях неопределенности, если не представляется возможным фирме использовать смешанную стратегию (договоры с другими организациями), для определения оптимальной стратегии фирмы используем критерии природы.

1. Критерий Вальде:

$$max(min\,a_{ij}) = max(16500{,}8150) = 16500,$$

фирме целесообразно использовать стратегию A_1.

2. Критерий максимума:

$$max(max\,a_{ij}) = max(77500{,}85850) = 85850,$$

целесообразно использовать стратегию A_2.

3. Критерий Гурвица: для определенности примем α = 0,4, тогда для стратегии фирмы A_1

$$\alpha\, min\,a_{ij} + (1-\alpha)max\,a_{ij} = 0{,}4 \cdot 16500 + (1-0{,}4)\cdot 77500 = 53100,$$

для стратегии A_2

$$\alpha\, min\,a_{ij} + (1-\alpha)max\,a_{ij} = 0{,}4 \cdot 8150 + (1-0{,}4)\cdot 85850 = 54770,$$

$$max(53100{,}54770) = 54770,$$

фирме целесообразно использовать стратегию A_2.

4. Критерий Сэвиджа. Максимальный элемент в первом столбце – 77 500, во втором столбце – 85 850.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 77500 & 16500 \\ 8150 & 85850 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\alpha = max(16500{,}8150) = 16500,$$

$$\beta = min(77500{,}85850) = 77500.$$

Элементы матрицы рисков находятся из выражения:

$$r_{ij} = max\,a_{ij} - a_{ij}$$

откуда $r_{11} = 77500 - 77500 = 0,$

$r_{12} = 85\,850 - 16\,500 = 69\,350,$

$r_{21} = 77\,500 - 8150 = 69\,350,$

$r_{22} = 85\,850 - 85\,850 = 0.$

Матрица рисков имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 69350 \\ 69350 & 0 \end{pmatrix},$$

$$min\{max(max\, a_{ij} - a_{ij})\} = min(69350{,}69350) = 69350,$$

целесообразно использовать стратегию A_1 или A_2.

Следовательно, фирме целесообразно применять стратегию A_1 или A_2.

Отметим, что каждый из рассмотренных критериев не может быть признан вполне удовлетворительным для окончательного выбора решений, однако их совместный анализ позволяет более наглядно представить последствия принятия тех или иных управленческих решений.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Представьте матрицу дискретного набора альтернатив и исходов.
2. Приведите понятие и задачи теории игр.
3. Дайте определения конфликта, конфликтной ситуации, игры, правил игры и платежа.
4. Дайте определения парной игры, игры с нулевой суммой, стратегии и оптимальной стратегии.
5. Приведите определения платежной матрицы, конечной игры, цены, верхней и нижней цены игры.
6. Дайте определения игры с седловой точкой, равновесия в чистых стратегиях, смешанной стратегии игрока.
7. Сформулируйте теоремы теории матричных игр.
8. Дайте понятие игры с природой.
9. Охарактеризуйте критерии Вальде и максимума для выбора оптимальной стратегии.
10. Приведите характеристику критерия Гурвица и формулу для его расчета.
11. Представьте характеристику критерия Сэвиджа и формулу для его расчета.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для успешного использования моделей и методов исследования операций в практике обучающийся должен знать основные экономические проблемы, при решении которых возникает необходимость в математическом инструментарии. Он должен ориентироваться в экономической постановке задачи и определять по ней, в каком разделе исследования операций следует искать средства ее решения, должен уметь формализовать экономическую задачу, т.е. описать ее с помощью известной математической модели, провести расчеты и получить количественные результаты. Однако самое главное – обучающийся должен уметь анализировать эти результаты и делать выводы, адекватные поставленной экономической задаче.

В результате изучения дисциплины «Исследование операций» обучающийся должен овладеть основными концепциями, принципами, теориями и фактами, связанными с исследованием операций, приобрести навыки моделирования, анализа и использования формальных методов для решения практических задач.

В учебном пособии рассмотрены:

− основные понятия и принципы исследования операций, приведена классификация методов;

− теоретические и практические основы математического моделирования экономических объектов, систем и процессов;

− модель и методы линейного программирования, в том числе двойственность и устойчивость оптимальных планов; приведен пример решения и анализа задачи ЛП с использованием исследования операций и компьютера;

− основы и методы динамического программирования; рассмотрен пример задачи определения оптимальной стратегии замены оборудования;

– основы сетевого планирования и управления, построения и расчета временных параметров сетевых графиков, оптимизации календарных планов;

– теоретические и практические основы систем массового обслуживания; подробно рассмотрены СМО с отказами и СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди;

– основные понятия и теоремы теории игр; подробно рассмотрены игры с «природой».

Учебное пособие поможет обучающимся:

– освоить современные методы анализа и моделирования систем, процессов и явлений при исследовании операций;

– ознакомиться с элементами аппарата исследования экономики, необходимого для решения теоретических и практических задач;

– развить логическое мышление, навыки математического исследования явлений и процессов, связанных с производственной деятельностью;

– применять системный подход и методы исследования операций в формализации решения прикладных задач;

– сформировать навыки самостоятельного изучения специальной литературы.

Учебное пособие подготовлено для обучающихся направления подготовки 09.03.04 Программная инженерия, но может использоваться обучающимися других направлений подготовки, аспирантами и специалистами агропромышленного комплекса.

Дальнейшее развитие знаний и умений по исследованию операций обучающиеся могут получить при изучении учебных изданий с расширением методов исследования и использовании современных программных средств на компьютере.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

1. Предмет и задачи исследования операций. Этапы операционного исследования.
2. Основные определения исследования операций.
3. Формализация и математическая модель операции.
4. Классификация методов исследования операций. Математическое программирование и его разделы.
5. Модель линейного программирования.
6. Основные определения и теоремы ЛП.
7. Двойственность в линейном программировании. Анализ оптимальных планов по двойственным оценкам.
8. Характеристика динамического программирования.
9. Модель определения оптимальной стратегии замены оборудования.
10. Характеристика сетевого планирования и управления. Сетевая модель.
11. Основные определения сетевой модели.
12. Какие существуют правила построения сетевых моделей?
13. Каковы основные временные параметры сетевого графика?
14. Прямой проход при расчете критического пути.
15. Обратный проход при расчете критического пути.
16. Полный и свободный резервы времени. Их роль при разработке календарного плана.
17. Понятие и основные элементы системы массового обслуживания. Классификация СМО.
18. Свойства простейшего потока заявок. Характеристики входящего и выходящего потока СМО.
19. Характеристика СМО с отказами и расчет их показателей.
20. Характеристика СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди и расчет их показателей.
21. Понятие и задачи теории игр.
22. Основные определения теории игр.
23. Теоремы теории матричных игр.
24. Понятие игры с природой. Критерии выбора альтернатив при неопределенности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гармаш, А. Н. Экономико-математические методы и прикладные модели : учебник для бакалавриата и магистратуры / А. Н. Гармаш, И. В. Орлова, В. В. Федосеев. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Юрайт, 2017. – 328 с.

2. Дубина, И. Н. Основы математического моделирования социально-экономических процессов : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / И. Н. Дубина. – М. : Издательство Юрайт, 2019. – 349 с.

3. Есипов, Б. А. Методы исследования операций : учебное пособие / СПб. : Лань, 2013. – 300 с.

4. Исследование операций в экономике : учебное пособие / Н. Ш. Кремер [и др.] ; ред. Н. Ш. Кремер. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2010. – 430 с.

5. Катаргин, Н. В. Экономико-математическое моделирование : учебное пособие / Н.В. Катаргин. – Санкт-Петербург : Лань, 2018. – 256 с.

6. Косников, С. Н. Математические методы в экономике : учеб. пособие для вузов / С. Н. Косников. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2019. – 172 с.

7. Попов, А. М. Экономико-математические методы и модели : учебник / А. М. Попов, В. Н. Сотников. – 3-е изд., испр. и доп. – Москва : Юрайт, 2019. – 345 с.

8. Смагин, Б. И. Экономико-математические методы : учебник для академического бакалавриата / Б. И. Смагин. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2019. – 272 с.

9. Фомин, Г. П. Экономико-математические методы и модели в коммерческой деятельности : учебник для бакалавров / Г. П. Фомин. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2019. – 462 с.

10. Шевалдина, О. Я. Математика в экономике : учебное пособие для вузов / О. Я. Шевалдина ; под науч. ред. В. Т. Шевалдина. – Москва : Юрайт, 2017.– 192 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1.Электронный каталог библиотеки Пермского ГАТУ [Электронный ресурс]: базы данных содержат сведения о всех видах лит., поступающей в фонд библиотеки Пермского ГАТУ. – Электрон.дан. (251 141 запись). – Пермь: [б.и., 2005]. Доступ не ограничен. https://pgsha.ru/generalinfo/library/webirbis/

2. Собственная электронная библиотека. Доступ не ограничен https://pgsha.ru/generalinfo/library/elib/

3. Система ГАРАНТ: электронный периодический справочник [Электронный ресурс]. – Электр.дан. (7162 Мб: 887 970 документов). – [Б.и., 199 -]; Срок не ограничен. Доступ из корпусов университета.

4. ConsultantPlus: справочно - поисковая система [Электронный ресурс]. – Электр.дан. (64 231 7651 документов) – [Б.и., 199 -]. Срок не ограничен. Доступ из корпусов университета.

5. ЭБС издательского центра «Лань» - «Ветеринария и сельское хозяйство», «Лесное хозяйство и лесоинженерное дело»; «Инженерно-технические науки», «Информатика», «Технологии пищевых производств», «Доступ к произведениям отдельно от Разделов (39 наименований)». http://e.lanbook.com/ Доступ не ограничен.

6. Электронно-библиотечная система «ЭБС ЮРАЙТ» www.biblio-online.ru

7. Электронная библиотечная система «Национальный цифровой ресурс «Руконт». Коллекция «Электронная библиотека авторефератов диссертаций ФГБОУ ВПО РГАУ МСХА имени К.А. Тимирязева» (массив документов с 1992 года по настоящее время), тематическая коллекция «Сельское хозяйство. Лесное дело. http://rucont.ru/ Доступ не ограничен.

8. ООО Научная электронная библиотека. Интегрированный научный информационный портал в российской зоне сети Интернет, включающий базы данных научных изданий и сервисы для информационного обеспечения науки и высшего образования. (Включает РИНЦ- библиографическая база данных публикаций российских авторов и SCIENCE INDEX- информационно - аналитическая система, позволяющая проводить аналитические и статистические исследования публикационной активности российских ученых и научных организаций). http://elibrary.ru/. Доступ не ограничен.

9.ООО «ИД «Гребенников». Электронная библиотека Grebennikon содержит статьи, опубликованные в специализированных журналах Издательского дома «Гребенников», где освещается широкий спектр вопросов по экономике (в том числе – по маркетингу, менеджменту, управлению персоналом, управлению финансами и т.д.). http://grebennikon.ru. Доступ не ограничен.

10. ООО «Ай Пи Эр Медиа». База данных ЭБС IPRbooks. Тематические коллекции через платформу Библиокомплектатор «Информатика и вычислительная техника», «Геодезия. Землеустройство», «Технические науки». http://www/bibliocomplectator.ru/. Доступ не ограничен.

11. ООО «ПОЛПРЕД Справочники». ЭБС Polpred.com (Полпред.ком). Доступ к электронным изданиям «Агропром в РФ и за рубежом. Доступ не ограничен. Обзор СМИ.

Учебное издание

Каштаева Светлана Васильевна

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Учебное пособие

Подписано в печать 27.10.20. Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л.4,81. Тираж 35 экз. Заказ № 100

ИПЦ «Прокростъ»
Пермского государственного аграрно-технологического
университета имени академика Д.Н. Прянишникова,
614990, Россия, Пермь, ул. Петропавловская, 23